CORSO DI ANALISI IN PIÙ VARIABILI II

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

L'OPERATORE DI LAPLACE

1 Introduzione all'operatore di Laplace.

Diamo un esempio di un problema di fisica matematica la cui equazione si esprime mediante l'operatore di Laplace. L'esempio deriva dalla cinematica dei fluidi incompressibili.

Se $\mathbf{v}$ è il vettore velocità di un moto fluido, il vettore $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\mathbf{v}$ ([1]) è legato alla rotazione delle particelle fluide e ne rappresenta la velocità angolare $\mathbf{w}$.
Se $\mathrm{rot}\mathbf{w} = \mathbf{0}$ il moto si chiama irrotazionale (non vorticoso); allora esiste un funzionale φ detto "potenziale della velocità", di cui $\mathbf{v}$ è il gradiente (se il dominio è semplicemente connesso) cioè $\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\varphi$. Quindi l'equazione della "continuità" che fornisce $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$, ci dà

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi \,=\, 0,$$

ovvero

$$\Delta\varphi \,=\, 0.$$

OSSERVAZIONE 1.

Nella cinematica dei mezzi continui si deve tradurre in equazioni la condizione di "conservazione della materia" che deve essere soddisfatta nel moto di ogni mezzo continuo. Ovvero l'aumento nell'unità di tempo della massa contenuta in uno spazio dato deve essere sempre uguale alla massa che nello stesso tempo entra in esso. L'equazione "della continuità" (dal punto di vista euleriano) si esprime nella forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\mathbf{v}) \,=\, 0, \tag{1}$$

dove ad esempio ρ può essere la densità del fluido e $\mathbf{v}$ la velocità della particella che attraversa l'elemento di superficie.
Il termine *divergenza* deriva dal fatto che nel caso di fluidi di densità unitaria *div dx* rappresenta la quantità di fluido uscente per unità di tempo dall'elemento di volume dx e quindi *div* $\mathbf{v}$ rappresenta la quantità di fluido che esce (diverge) dall'unità di volume nell'unità di tempo secondo l'equazione

$$\int_{\partial\Omega} \rho\,(\mathbf{v}\cdot\nu)\,d\sigma \,=\, \int_{\Omega} \mathrm{div}(\rho\,\mathbf{v})\,dx, \tag{2}$$

essendo Ω un corpo di frontiera $\partial\Omega$, con ν normale esterna a $\partial\Omega$.
Inoltre, poiché $\mathrm{div}\rho\,\mathbf{v} = \rho\,\mathrm{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathrm{grad}\rho$, se il fluido è incompressibile (e omogeneo), nell'equazione (1) la densità è costante e quindi l'equazione della continuità diventa

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} \,=\, 0.$$

[1] Ovvero il vettore di componenti

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\,,\,\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\,,\,\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right),$$

dove $\mathbf{v}(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)) = \mathbf{e_1}v_1(x,y,z) + \mathbf{e_2}v_2(x,y,z) + \mathbf{e_3}v_3(x,y,z))$.
Osserviamo che $\mathrm{rot}\mathbf{v}$ si può determinare formalmente calcolando il seguente determinante

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Si parla in questo caso di *campi vettoriali a divergenza nulla* che sono caratterizzati dal fatto che il flusso uscente da un qualunque porzione Ω di spazio finito sia nullo. Questo campi si chiamano *campi solenoidali* (dal greco $\sigma\omega\lambda\grave{\eta}\nu$ = tubo). Infatti questi campi, considerando le linee di flusso uscenti dai punti di una linea chiusa, costituiscono una superficie tubolare detta *tubo di flusso.* Fissate due sezioni trasversali con le normali orientate in versi corrispondenti, se il campo è solenoidale, il flusso attraverso le sezioni è lo stesso flusso del vettore $\rho\mathbf{v}$ attraverso la superficie Σ ed è

$$\int_{\partial\Omega} \rho\,(\mathbf{v}\cdot\nu)\;d\sigma. \tag{3}$$

OSSERVAZIONE.

Dal punto di vista matematico dire che $\mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ equivale a dire che il campo dei vettori $\mathbf{v}$ verifica la *condizione delle derivate in croce* relativa alla forma differenziale $\omega = v_1\,dx + v_2\,dy + v_3\,dz$. Se il dominio è semplicemente connesso è noto che esiste una funzione φ tale che

$$(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{grad}\,\varphi.$$

2 L'equazione di Laplace.

Consideriamo l'equazione $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}u = 0$, che nel caso $n = 2$ si può scrivere

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(equazione di Laplace).}$$

Le funzioni che risolvono $\Delta u = 0$ si chiamano *funzioni armoniche.* Consideriamo il seguente problema (*problema di Dirichlet*)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) & = & 0 \\ u(0,y) & = & 0 \\ u(1,y) & = & 0 \\ u(x,0) & = & 0 \\ u(x,1) & = & f(x) \end{cases} \tag{4}$$

dove $(x,y) \in Q = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.
Cerchiamo una soluzione mediante il metodo di separazione delle variabili, ovvero cerchiamo una soluzione del tipo

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y), \tag{5}$$

che sostituita in (4) fornisce per ogni $(x,y) \in Q$:

$$X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0. \tag{6}$$

Cerchiamo ora una soluzione *non nulla* del problema seguente relativo ad una equazione ordinaria del secondo ordine

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda\,X(x) & = & 0 \\ X(0) & = & 0 \\ X(1) & = & 0. \end{cases} \tag{7}$$

Tenuto conto di (6) si ottiene

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) & = & 0 \\ Y(0) & = & 0 \\ Y(1) & = & f(x) \end{cases} \tag{8}$$

Prima di risolvere questi problemi determiniamo il segno del parametro λ. Dall'equazione di (7), moltiplicando per $X(x)$ si ha

$$X''(x)\, X(x) \,-\, \lambda\, X^2(x) \,=\, 0, \tag{9}$$

ovvero

$$\frac{d}{dx}[X'(x)X(x)] \,-\, [X'(x)]^2 \,-\, \lambda\, X^2(x) \,=\, 0, \tag{10}$$

integrando tra 0 e 1, tenuto conto delle condizioni iniziali

$$X'(x)X(1) \,-\, X'(0)X(0) \,-\, \int_0^1 [X'(x)]^2\, dx \,-\, \lambda \int_0^1 [X(x)]^2\, dx \,=$$

$$= \,-\, \int_0^1 [X'(x)]^2\, dx \,-\, \lambda \int_0^1 [X(x)]^2\, dx \,=\, 0,$$

da cui si deduce che deve essere $\lambda < 0$.
L'insieme delle soluzioni è dato da

$$u(x,y) = X(x)\, Y(y) = \left(c_1\, e^{\sqrt{\lambda}x} \,+\, c_2\, e^{-\sqrt{\lambda}x}\right)\left(c_3\, e^{\sqrt{-\lambda}y} \,+\, c_4\, e^{-\sqrt{-\lambda}y}\right) \,=$$

$$= \left(c_1 \,\cos\sqrt{-\lambda}x \,+\, c_2\,\sin\sqrt{-\lambda}x\right)\left(c_3\, e^{\sqrt{-\lambda}y} \,+\, c_4\, e^{-\sqrt{-\lambda}y}\right).$$

Imponendo le condizioni al contorno per $X(x)$ si ha

$$\begin{cases} c_1\,\cos\sqrt{-\lambda} \,+\, c_2 \sin\sqrt{-\lambda} & = & 0 \\ c_1 \,+\, c_2 & = & 0, \end{cases}$$

e quindi

$$c_2\, \sin\sqrt{-\lambda} \,=\, 0,$$

ovvero

$$\sqrt{-\lambda} \,=\, n\,\pi \iff \lambda^2 \,=\, -n^2\,\pi^2, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}.$$

Quindi le soluzioni sono

$$X_n(x) \,=\, c_2\,\sin n\pi\, x.$$

Per quanto riguarda il problema (8), dato che

$$Y(y) \,=\, c_3\, e^{\sqrt{-\lambda}y} \,+\, c_4\, e^{-\sqrt{-\lambda}y},$$

ponendo $Y(0) = 0$ si ha $c_3 + c_4 = 0$ e quindi

$$Y_n(x) \,=\, 2\, c_3 \left(\frac{e^{n\pi y} \,-\, e^{-n\pi y}}{2}\right) \,=\, 2\, c_3\, \sinh\, n\pi\, y.$$

Consideriamo ora l'ultima condizione al bordo

$$u(x,1) \,=\, X(x)\, Y(1) \,=\, f(x).$$

Se f è del tipo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \sin n\pi x,$$

prendendo

$$A_n = \frac{\alpha_n}{\sinh n\pi}$$

si ha che

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sin n\pi x \; \sinh n\pi y$$

è la soluzione cercata.
Che succede se f non è del tipo visto sopra? La soluzione fu proposta da Fourier, affermando che ogni funzione può essere rappresentata come una serie infinita di funzioni trigonometriche (ad esempio in seni)([2])

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin n\pi x,$$

dove α_n si calcola come segue

$$\alpha_n = \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \; dx.$$

Quindi possiamo scrivere la soluzione del problema (4) come segue

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin n\pi x \; \sinh n\pi y \tag{11}$$

dove

$$A_n = \frac{\alpha_n}{\sinh n\pi}$$

A questo punto è naturale porsi le seguenti domande:

1. dove converge la serie (11)?
2. u è derivabile 2 volte?
3. u soddisfa il problema di Dirichlet?
4. u soddisfa le condizioni al bordo?
5. il metodo seguito per determinare una soluzione è l'unico possibile?
6. la soluzione trovata è l'unica?

Iniziamo rispondendo alla domanda (6). Per assurdo, se esistessero due soluzioni del problema (4) allora la loro differenza risolverebbe il problema

$$\begin{cases} \Delta\left[u(x,y) - v(x,y)\right] &= 0 \\ u(0,y) - v(0,y) &= 0 \\ u(1,y) - v(1,y) &= 0 \\ u(x,0) - v(x,0) &= 0 \\ u(x,1) - v(x,1) &= 0 \end{cases}.$$

[2]Si osservi che le funzioni $\{\sin n\pi x\}_{n\in\mathbf{N}}$ sono ortonormali su $[0,1]$.

Moltiplicando l'equazione per $u-v$ e integrando su Q si ha

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x^2}\,(u-v)\,dx\,dy \;+\; \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 (u-v)}{\partial y^2}\,(u-v)\,dx\,dy \;=\; 0,$$

da cui

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial (u-v)}{\partial x}\right]^2 dx\,dy \;+\; \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial (u-v)}{\partial y}\right]^2 dx\,dy \;=\; 0,$$

ovvero $\operatorname{grad}(u-v)=0$ in Q, e quindi $u-v=\text{cost}$. Essendo $u-v=0$ su ∂Q si ha che $u-v=0$.
Una risposta a (1) è possibile darla se mettiamo qualche ipotesi supplementare su f ad esempio, se f è sviluppabile in serie di Fourier su $[0,1]$, è sufficiente porre $f \in C^1([0,1])$, allora

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_n^2 \;<\; +\infty.$$

Inoltre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_Q |A_n \sin(n\pi x)\, \sinh(n\pi y)| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \, \sup_Q \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh(n\pi)} \;=$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sup_Q \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh h\pi}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} \;<\; +\infty,$$

perché

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\frac{e^{(n+1)\pi y} - e^{-(n+1)\pi y}}{e^{(n+1)\pi} - e^{-(n+1)\pi}}}{\frac{e^{n\pi y} - e^{-n\pi y}}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}}}\right)^2 \;=\; \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\frac{e^{2(n+1)\pi y}}{e^{2(n+1)\pi}}}{\frac{e^{2n\pi y}}{e^{2n\pi}}}\right)^2 \;=\; \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2\pi y}}{e^{2\pi}} \;=\; e^{2\pi(y-1)} \;<\; 1,$$

per $0<y<1$.
Posto $Q_1 = \{(x,y) :\, 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \;\le y_0 \;<\; 1\}$, la serie di Fourier converge su Q_1.
Analogamente derivando $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\, n\pi\,(-\cos\, n\pi\, x)\;\; \sinh\, n\pi\, y.$$

Ragionando come sopra

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{Q_1} |A_n\, n\pi\,(-\cos(n\pi x)\; \sinh(n\pi y)| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 \;\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sup_Q\, n\pi\, \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh(n\pi)}\right)^2 \;=$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n}\, \frac{\frac{\sinh(n+1)\pi y}{\sinh(n+1)\pi}}{\frac{\sinh n\pi y}{\sinh n\pi}} \;=\; \lim_{n\to+\infty} \left(1 \,+\, \frac{1}{n}\right)\, e^{2\pi(y-1)} \;<\; 1,$$

per $y<1$.
Analogo discorso per le altre derivate prime e seconde. Poiché la serie delle derivate converge totalmente e quindi uniformemente su Q_1, se ne deduce che le derivate della serie coincidono con la serie delle derivate su Q_1. Possiamo quindi calcolare su Q_1

$$\Delta u \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \Delta[A_n\, \sin n\pi x \;-\; \sinh(n\pi y)] \;=\; 0.$$

Resta da controllare se u verifica le condizioni al bordo. Ovviamente

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0,$$

in quanto la serie (11) converge uniformemente su Q_1. Il problema è stabilire se

$$u(x, 1) = f(x).$$

Per fare questo dobbiamo verificare la convergenza uniforme su Q. A tale scopo utilizziamo il seguente test di Abel della convergenza uniforme:

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(y)\, b_n(y)$ converge uniformemente sul dominio D se sono verificate le condizioni

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(y)$ converge uniformemente su D;
2. la successione di funzioni $\{b_n(y)\}_{n\in\mathbf{N}}$ è uniformemente limitata su D;
3. per ogni $y \in D$ la successione $\{b_n(y)\}_{n\in\mathbf{N}}$ è monotona.

Nella serie (11) prendiamo

$$a_n(y) \;=\; \alpha_n \,\sin\, n\pi x, \quad \text{costante in } y, \;\; b_n(y) \;=\; \frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh\, n\pi}$$

Risulta

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n\, \sin n\pi x$ converge uniformemente per ogni $y \in [0, 1]$ (è costante in y);
2. $\dfrac{\sinh(n\pi y)}{\sinh\, n\pi} \leq 1$, per ogni $y \in [0, 1]$;
3. la successione $\left\{\dfrac{\sinh(n\pi y)}{\sinh\, n\pi}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ è monotona decrescente per ogni valore di $y \in [0, 1]$, ovvero

$$\frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh\, n\pi} \geq \frac{\sinh(n+1)\pi y}{\sinh\,(n+1)\pi}.$$

I punti 1. e 2. sono ovvi. Dimostriamo 3. Dimostrare

$$\frac{\sinh(n\pi y)}{\sinh\, n\pi} \geq \frac{\sinh(n+1)\pi y}{\sinh\,(n+1)\pi}$$

equivale a dimostrare

$$\frac{e^{n\pi y} \;-\; e^{-n\pi y}}{e^{n\pi} \;-\; e^{-n\pi}} \geq \frac{e^{(n+1)\pi y} \;-\; e^{-(n+1)\pi y}}{e^{(n+1)\pi} \;-\; e^{-(n+1)\pi}}.$$

Da cui

$$e^{\pi y}\; \frac{e^{2n\pi y} \;-\; 1}{e^{2(n+1)\pi y} \;-\; 1} \geq e^{\pi}\; \frac{e^{2n\pi} \;-\; 1}{e^{2(n+1)\pi} \;-\; 1}.$$

Posto $a = 2n$ e $t = \pi y$, consideriamo la funzione

$$\phi(t) = e^t\; \frac{e^{at} \;-\; 1}{e^{(a+2)t} \;-\; 1},$$

dimostriamo che è decrescente per $t > 0$ determinando il segno della sua derivata prima.

$$\phi'(t) = \frac{e^t}{(e^{(a+2)t} \;-\; 1)^2}\; \left\{1 \;-\; e^{(2a+2)t} \;+\; (a+1)\left[e^{(a+2)t} \;-\; e^{at}\right]\right\}$$

Determinare il segno di ϕ' equivale a determinare il segno della funzione

$$\psi(t) = \left\{1 \, - \, e^{(2a+2)t} \, + \, (a+1) \left[e^{(a+2)t} \, - \, e^{at}\right]\right\}$$

Calcoliamo la sua derivata prima:

$$\psi'(t) = e^{at} \left[-(2a+2) \, e^{(a+2)t} \, + \, (a+1)(a+2)e^{2t} \, - \, (a+1)a\right].$$

Anche di questa dobbiamo determinare il segno considerando la funzione

$$\sigma(t) \, = \, -(2a+2) \, e^{(a+2)t} \, + \, (a+1)(a+2)e^{2t} \, - \, (a+1)a,$$

e quindi

$$\sigma'(t) \, = \, e^{2t} \, (a+2) \, (2a+2) \, \left[1 \, - \, e^{at}\right].$$

Ovviamente, essendo $a > 0$, e $t > 0$, risulta $\sigma'(t) < 0$, e poiché $\sigma(0) = 0$ si ha $\sigma(t) < 0$. Allora $\psi'(t) < 0$ per ogni $t > 0$. Osserviamo anche che $\psi(0) = 0$, per cui si deduce che, per ogni $t > 0$, $\psi(t) < 0$, cioé $\phi'(t) < 0$. Che è quanto volevamo dimostrare.