Università di Pisa
Dipartimento di Matematica “Leonida Tonelli”

Sistemi ed equazioni ellittiche totalmente non lineari del second’ordine

Dispense per il Corso di Elementi di Analisi Superiore 2

Antonio Tarsia

A.A. 2006/2007

1 Notazioni e prime definizioni

Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e u una funzione a valori vettoriali, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Inoltre indichiamo con
$p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$, dove $p_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, \cdots, n$, e quindi $p \in \mathbb{R}^{nN}$.
$\xi = \{\xi_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$, con $\xi_{ij} \in \mathbb{R}^N$, e quindi $\xi_{ij} \in \mathbb{R}^N$, poniamo poi
$Du = (D_1 u, \cdots, D_n u)$
$D^2 u = \{D_{ij} u\}_{i,j=1,\cdots,n}$ [1]
Inoltre se
$\mathcal{F}(x) = (\mathcal{F}_1(x), \cdots, \mathcal{F}_n(x)) : \Omega \to \mathbb{R}^{nN}$
si ha
$div \mathcal{F}(x) = \sum_{i=1}^n D_i \mathcal{F}_i(x) \in \mathbb{R}^N$.

Un **operatore differenziale del secondo ordine** è un operatore del tipo $a(x, u, Du, D^2u)$ definito su $\Omega \times \mathbb{R}^N \times R^{nN} \times \mathbb{R}^{n^2 N}$ a valori in $\mathbb{R}^N$. Sulla funzione a partiamo facendo le seguenti ipotesi

- a è misurabile in x;
- a è continua nelle altre variabili.

L'operatore a puó essere scritto anche nella forma

$$a(x, u, Du, D^2u) = a(x, u, Du, D^2u) - a(x, u, Du, 0) + a(x, u, Du, 0).$$

Posto

$$F(x, u, Du, D^2u) = a(x, u, Du, D^2u) - a(x, u, Du, 0), \quad f(x, u, Du) = a(x, u, Du, 0),$$

non è quindi restrittivo supporre

$$F(x, u, Du, 0) = 0,$$

inoltre si ha anche che $F, f \in \mathbb{R}^N$, e soddisfano le ipotesi di Carathéodory, ovvero

- $F,\ f$ sono misurabili in x;
- $F,\ f$ sono continue nelle altre variabili.

Poichè per **parte principale** di un operatore si intende la parte che contiene le derivate di ordine massimo, essendo

$$a(x, u, Du, D^2u) = F(x, u, Du, D^2u) + f(x, u, Du),$$

possiamo dire che F è la **parte principale** dell'operatore a.

[1] In alcuni testi: $D^2u = H(u)$, matrice hessiana di u

Un operatore a si chiama **variazionale** se la sua parte principale F si puó scrivere in **forma di divergenza**, cioè:

$$F(x,u,Du,D^2u) \ = \ div\mathcal{F}(x,u,Du)$$

(con $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^N$)
a si chiama **non variazionale** nel caso contrario.
Nel seguito considereremo solo operatori di tipo **non variazionale**, sulla parte principale dei quali faremo, per comodità, l'ipotesi

$$F(x,u,Du,0) = 0 \tag{1}$$

L'operatore si dice **quasi-lineare** se è lineare nelle derivate di ordine massimo, ovvero se lo possiamo scrivere nella forma

$$F(x,u,Du,D^2u) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x,u,Du) \ D_{ij}u$$

(dove $A_{ij}(x,u,Du)$ sono matrici $N \times N$)
La parte principale di un operatore **lineare** di tipo non variazionale si scrive nella forma

$$F(x,D^2u) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \ D_{ij}u \tag{2}$$

(dove $A_{ij}(x)$ sono matrici $N \times N$). Iniziamo con il cosiderare alcune definizioni di **operatore ellittico** nel caso lineare.

Definizione 1.1. *Sia $N = 1$ diremo che F è* **uniformemente ellittico** *su Ω se esistono due funzioni reali positive definite su Ω ed una costante positiva C tali che $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$*

$$\lambda(x) \ \|\xi\|_n^2 \ \le \ \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \ A_{ij}(x) \, \xi_i \xi_j \ \le \ \Lambda(x) \ \|\xi\|_n^2, \tag{3}$$

$$\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)} \le C. \tag{4}$$

Nel caso $N > 1$ si possono dare due differenti definizioni di ellitticitá.

Definizione 1.2. *(*Ellitticità fortissima o Condizione di Legendre*)*
Diremo che F è **fortissimamente ellittico** *o soddisfa la* **Condizione di Legendre** *su Ω se esiste una costante λ positiva tale che $\forall \tau \in \mathbb{R}^{nN}$, $\forall x \in \Omega$*

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \ \|\tau^i\|_N^2 \ \le \ \sum_{i,j=1}^{n} \ \sum_{h,k=1}^{N} \ A_{ij}^{hk}(x) \ \tau_i^h \, \tau_j^k. \tag{5}$$

Definizione 1.3. *(*Ellitticità forte o Condizione di Legendre-Hadamard*)*
Diremo che F è **fortissimamente ellittico** *o soddisfa la* **Condizione di Legendre-Hadamard** *su Ω se esiste una costante λ positiva tale che $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^N$, $\forall x \in \Omega$*

$$\lambda \, \|\xi\|_n^2 \, \|\eta\|_N^2 \ \le \ \sum_{i,j=1}^{n} \ \sum_{h,k=1}^{N} \ A_{ij}^{hk}(x) \ \xi_i \, \xi_j \, \eta_h \, \eta_k. \tag{6}$$

Se $N = 1$ le tre definizioni coincidono.
Se $N > 1$ e l'operatore soddisfa la *Condizione di Legendre* allora soddisfa anche la condizione di *Legendre-Hadamard*. Infatti basta porre in (5): $\tau_i^h = \xi_i \, \eta_h$. Il viceversa è in generale falso come vedremo negli esempi che esporremo più avanti.

La seguente definizione di *ellitticità* è stata introdotta da Campanato in [19].

Definizione 1.4. *(Condizione A_x)*
Diremo che F soddisfa la Condizione A_x su Ω se esistono due costanti reali γ, δ, con $\gamma+\delta < 1$, $\gamma > 0$, $\delta \geq 0$, ed esiste una funzione $\alpha(x)$ positiva definita su Ω tali che $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^{n\times n\times N}$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \ \xi_{ii} \ - \ \alpha(x) \ \sum_{i,j=1}^n \ A_{ij}(x) \ \xi_{ij} \right\|_N \ \leq \ \gamma \|\xi\|_{N\times n^2} + \delta \ \| \sum_{i=1}^n \ \xi_{ii} \|_N .$$

Una ulteriore condizione di ellitticità è la seguente che generalizza la cosidetta *Condizione di Cordes* (vedi [29])

Definizione 1.5. *(Condizione di Cordes)*
Diremo che F soddisfa la condizone di Cordes su Ω se esiste una costante $\gamma \in (0,1]$ tale che $\forall x \in \Omega$

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^n \ (A_{ii}(x)|I)\right]^2}{\sum_{i,j=1}^n \ \|A_{ij}(x)\|^2_{N\times N}} \ \geq \ nN - \gamma. \tag{7}$$

Come vedremo nel seguito la *Condizione A_x* è di più immediata applicazione rispetto alla condizione di Cordes, nel dimostrare problemi di esistenza ed unicità relativi agli operatori ellittici. Risulta però difficile controllare se un operatore verifica la *Condizione A_x*, mentre risulta più semplice controllare se verifica la *Condizione di Cordes*.È utile quindi il seguente teorema.

Teorema 1.1. *L'operatore lineare F verifica la condizone A_x con $\delta = 0$ se e solo se soddisfa la condizione di Cordes e $\sum_{i=0}^n \ (A_{ii}(x)|I) > 0$, $\|A(x)\|_{N\times N} \ \geq C > 0$ in Ω.*

Dimostrazione.

$$\sum_{i,j=1}^n \ \xi_{ii} \ = \ \left(\sum_{i,j=1}^n \ \sum_{h=1}^N \ \xi_{ii}^h \, \delta_{hk}^N \right)_{k=1,\cdots,N} = \sum_{i,j=1}^n \ I_N \, \xi_{ii} \ = \ \sum_{i,j=1}^n \ I_N \, \xi_{ij} \ \delta_{ij}^n.$$

si ha ([2])

$$\| \sum_{ij=1}^n \ [I_N \, \delta_{ij} \ - \ \alpha(x) \, A_{ij}] \ \xi_{ij} \|_N \ \leq \ \gamma \, \|\xi\|_{\mathbb{R}^{n\times n\times N}}$$

[2]Osserviamo che se L è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^{n\times n\times N} \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$L(\xi) = (L_1(\xi), \cdots, L_N(\xi)) = \left(\sum_{i,j=1}^n \ \sum_{h=1}^N \ A_{ij}^{1h} \, \xi_{ij}^h \ , \cdots, \ \sum_{i,j=1}^n \ \sum_{h=1}^N \ A_{ij}^{Nh} \, \xi_{ij}^h \right)$$

che equivale alla diseguaglianza

$$P(\alpha(x)) = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h,k=1}^{N} \alpha^2(x) \left[A_{ij}^{hk}(x)\right]^2 - 2\alpha(x)\, A_{ij}^{hk}(x)\, \delta_{ij}^{hk} + [\delta_{ij}^{hk}]^2 - \gamma^2 \leq 0. \tag{8}$$

Si tratta di un polinomio di secondo grado in $\alpha(x)$ che assume il valore minimo per

$$a_0(x) = \frac{\left(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h,k=1}^{N} A_{ij}^{hk}(x)\ \delta_{ij}^{hk}\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h,k=1}^{N} \left[A_{ij}^{hk}(x)\right]^2}.$$

Quindi $P(\alpha_0(x)) \geq 0$ se e solo se

$$\frac{\left(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h,k=1}^{N} A_{ij}^{hk}(x)\ \delta_{ij}^{hk}\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h,k=1}^{N} \left[A_{ij}^{hk}(x)\right]^2} \geq nN - \gamma^2.$$

Se $N = 1$, in [49] si dimostra che la *Condizione* A_x con $\delta > 0$ è equivalente alla stessa con $\delta = 0$ (ed ovviamente $\alpha(x)$ e γ differenti). Inoltre è dimostrato che è equivalente alla *Condizione di Cordes*. Se $N = 1$, $n = 2$ si dimostra (vedi [49]) che la *Condizone di Cordes* è equivalente alla uniforme ellitticità. Nel caso $N = 1$ e $n > 2$ l'uniforme ellitticità è più debole delle suddette condizioni come si vede dal seguente esempio.

Esempio 1.1. *Vedi [46]*

Se un operatore lineare verifica la *Condizione* A_x allora verifica la *Condizione di Legendre-Hadamard,* infatti dalla relazione (7), scelto $\xi_{ij} = \eta\, \lambda_i\, \lambda_j$, dove $\eta \in \mathbb{R}^N$, $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, tenuto conto che

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ii} = \eta \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \eta\, \|\lambda\|_n^2,$$

$$\|\xi\|_{nN}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i^2\, \lambda_j^2\, \|\eta\|_N^2 = \|\lambda\|_n^4\, \|\eta\|_N^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, \xi_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, \eta\, \lambda_i\, \lambda_j,$$

possiamo scrivere

$$\|L\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n\times n\times N},\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{k=1}^{N} \|L_k(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n\times n\times N},\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{h,k=1}^{N} \left(A_{ij}^{hk}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ed anche

$$\|L\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n\times n\times N},\mathbb{R}^N)} = \sup_{\xi\neq 0} \frac{\|L(\xi)\|_{\mathbb{R}^N}}{\|\xi\|_{\mathbb{R}_{n\times n\times N}}}.$$

ed elevando al quadrato

$$\| \sum_{i=1}^{n} \xi_{ii} \|_N^2 \, + \, \alpha^2 \, \| \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \, \xi_{ij} \|_N^2 \, - \, \left(\gamma \, \| \xi \|_N + \delta \, \| \sum_{i=1}^{n} \xi_{ii} \|_N \right)^2 \, \leq$$

$$\leq \, 2 \, \alpha \, \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ij} \, \xi_{ij} \mid \sum_{i=1}^{n} \xi_{ii} \right)_N$$

otteniamo

$$\|\eta\|_N^2 \, \|\lambda\|_n^4 \, - \, \left(\gamma \, \|\lambda\|_n^2 \, \|\eta\|_N \, + \, \delta \, \|\lambda\|_n \|\eta\|_N \right)^2 \, \leq \, 2 \, \alpha \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \, \lambda_j \, \left(A_{ij} \, \eta \mid \eta \right)_N$$

da cui segue

$$\frac{1 - (\gamma + \delta)^2}{2\alpha} \, \|\eta\|_N^2 \, \|\lambda\|_n^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \, \lambda_j \, \left(A_{ij} \, \eta \mid \eta \right)_N .$$

Osservazione 1.1. *La* Condizione di Legendre-Hadamard *è quindi più debole della* Condizione A_x *(di conseguenza anche della* Condizione di Cordes*). Gli esempi che seguono ci permettono effettuare un confronto tra le definizioni di* ellitticità *date fino ad ora.*

Esempio 1.2. *(Operatore dell'elasticità lineare)*

Consideriamo il seguente operatore ($n = 3$, $N = 3$)

$$F(D^2 u) \, = \, a \, \Delta u \, + \, (a + 2b) \, \mathrm{grad} \, \mathrm{div} \, u \, = \, \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \, D_{ij} u,$$

con $a > 0$, $b > 0$, dove

$$A_{ii} \, = \begin{pmatrix} a + (a+2b)\delta_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & a + (a+2b)\delta_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & a + (a+2b)\delta_{i1} \end{pmatrix}$$

$$
A_{21} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a+2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{12} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & a+2b & 0 \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
A_{32} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+2b & 0 \end{pmatrix} \quad A_{23} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & a+2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
A_{31} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a+2b & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{13} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+2b \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

L'operatore soddisfa la condizione di Legendre-Hadamard:

$$
\sum_{i,j=1}^{3} \sum_{h,k=1}^{3} A_{ij}^{hk}\, \xi_i\, \xi_j\, \eta_h\, \eta_k \;=\; a\,[(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)]\,[(\eta_1)^2 + (\eta_2)^2 + (\eta_3)^2] \,+
$$

$$
+\,(a+2b)\,[(\xi_1\,\eta_1)^2 \;+\; (\xi_2\,\eta_2)^2 \;+\; (\xi_3\,\eta_3)^2]^2 \;\geq\; a\,\|\xi\|_3^2\,\|\eta\|_3^2,
$$

ma non soddisfa la *Condizione di Legendre*. Infatti per ogni $\eta_i = (\eta_i^1, \eta_i^2, \eta_i^3) \in \mathbb{R}^3$ $i = 1,\, 2,\, 3$, si ha

$$
\sum_{i,j=1}^{3} \;(A_{ij}\,\eta_i \;\mid\; \eta_j)_3 \;=\; (2a+2b)\; \left[(\eta_1^1)^2 + (\eta_2^2)^2 + (\eta_3^3)^2\right]^2 + (2a+4b)\,[(\eta_1^2\,\eta_2^1 \;+\; \eta_3^1\,\eta_1^3 \;+\; \eta_3^2(\eta_2^3],
$$

se scegliamo $\eta_1,\, \eta_2,\, \eta_3$ tali che $\eta_1^1 = \eta_2^2 = \eta_3^3 = 0$, $\eta_2^1 \;=\; \eta_1^3 \;=\; \eta_3^1 \;=\; \eta_3^2 \;=\; 1$ e $\eta_1^2 \;=\; \eta_2^3 = -1$, risulta

$$
\sum_{i,j=1}^{3} \;(A_{ij}\,\eta_i \;\mid\; \eta_j)_3 \;<\; 0.
$$

L'operatore dell'elasticità non verifica nemmeno la *Condizione A_x*. Infatti

$$
\|\sum_{i=1}^{3} \xi_{ii} \;-\; \alpha \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\,\xi_{ij}\|_3 =
$$

$$
= \left\| \begin{pmatrix} [1-2\alpha(a+b)]\xi_{11}^1 \\ \xi_{11}^2 \\ \xi_{11}^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{22}^1 \\ [1-2\alpha(a+b)]\xi_{22}^2 \\ \xi_{22}^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{33}^1 \\ \xi_{33}^2 \\ [1-2\alpha(a+b)]\xi_{33}^3 \end{pmatrix} \right. +
$$

$$-\alpha\,(a+2b)\left[\begin{pmatrix}0\\ \xi^1_{21}\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\xi^2_{12}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\xi^3_{13}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \xi^1_{31}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \xi^1_{32}\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\xi^2_{23}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right]\Bigg\|_3 \leq$$

$$\leq\ \gamma\left[\sum_{1,2,k=1}^{3}|\xi^k_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}+\delta\|\sum_{i=1}^{3}\xi_{ii}\|_3$$

Scegliendo $\xi_{ij}=(0,0,0)$, per ogni $i,j=1,2,3$, tranne che per $\xi^3_{11}=1$ si ottiene $1\geq\gamma+\delta$.

Esempio 1.3. *Siano $n=2$ ed $N=2$. Consideriamo la famiglia di matrici così definita :*

$$A_{11}=\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \sigma\end{pmatrix}\quad A_{12}=\begin{pmatrix}0 & \tau\\ -\tau & 0\end{pmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad A_{22}=\begin{pmatrix}\sigma & 0\\ 0 & \sigma\end{pmatrix}$$

È evidente che $\{A^{hk}_{ij}\}^{h,k=1,2}_{i,j=1,2}$ soddisfa la *Condizione di Legendre-Hadamard* se $\sigma>0$, mentre non soddisfa la *Condizione di Legendre* $\sigma<\frac{\tau}{2}$, perchè dalla diseguaglianza

$$\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{h,k=1}^{2}A^{hk}_{ij}\,\xi^h_i\,\xi^k_j\ =\ \det(\xi^\alpha_i)\ +\ \sigma\sum_{i=1}^{2}\sum_{h=1}^{2}(\xi^h_i)^2\ \geq\ \lambda\sum_{i,h=1}^{2}(\xi^h_i)^2$$

otteniamo

$$(\sigma-\lambda)\,(\xi^1_1)^2\ +\ (\sigma-\lambda)\,(\xi^2_1)^2\ +\ (\sigma-\lambda)\,(\xi^2_2)^2\ -\ \tau\,\xi^1_1\,\xi^2_2\ +\ \tau\,\xi^2_1\xi^1_2>0$$

che non è verificata se ad esempio $\xi^2_1=\xi^1_2=0$ e

$$\tau^2\,4\,(\sigma-\lambda)^2\ >\tau^2-4\sigma^2>0$$

perché in tal caso la disequazione

$$(\sigma-\lambda)\,\frac{(\xi^1_1)^2}{(\xi^2_2)^2}\ -\ \tau\,\frac{\xi^1_1}{\xi^2_2}\ +\ (\sigma-\lambda)<0$$

ammette soluzioni.
Osserviamo inoltre che se vale $\sigma>\dfrac{\tau}{2}$ allora esiste $\lambda>0$ per cui è verificata (7) perché

$$\sigma[(\xi^1_1)^2]+[(\xi^2_2)^2]>\frac{\tau}{2}(\xi^1_1)^2+(\xi^2_2)^2>\tau\xi^1_1\,\xi^2_2$$
$$\sigma[(\xi^2_1)^2]+[(\xi^1_2)^2]>\frac{\tau}{2}(\xi^2_1)^2+(\xi^1_2)^2>\tau\xi^2_1\,\xi^1_2.$$

D'altra parte se consideriamo la *Condizione di Cordes* si ha

$$\frac{(4\,\sigma)^2}{2\,\tau^2\ +\ 4\,\sigma^2}>3,$$

se $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\tau\ <\ \sigma$. Per $\dfrac{\tau}{2}<\sigma<\sqrt{\dfrac{3}{2}}\tau$ è verificata la *Condizione di Legendre* non quella di Cordes.

2 Definizioni di ellitticità per operatori non lineari non differenziabili.

In questa parte prendiamo in esame alcune definizioni di ellitticità per operatori non differenziabili. Iniziamo con il considerare le equazioni (quindi $N = 1$).
Siano Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega \times \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$, ([3]) funzione misurabile in x e continua nelle altre variabili, $\mathcal{S}^n$ indica lo spazio $\dfrac{n(n+1)}{2}$ dimensionale delle matrici $n \times n$ reali e simmetriche. La seguente definizione di operatore ellittico è stata introdotta da [CNS] (vedi anche [3]).

Definizione 2.1. *Diremo che F è uniformemente ellittico nel senso di CNS (Caffarelli-Niremberg-Spruck) se esistono due costanti positive λ, Λ (chiamate costanti di ellitticità) con $\lambda \leq \Lambda$ tali che per ogni M, $P \in \mathcal{S}^n$, con $P \geq 0$ ([4]) si ha*

$$\lambda \, \|P\| \,\leq\, F(x, M+P) \,-\, F(x, M) \,\leq\, \Lambda \, \|P\|, \quad q.o. \quad x \in \Omega. \tag{9}$$

L'operatore lineare $F(D^2u) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} D_{ij} u$, che abbia la matrice $\{A_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ reale e simmetrica con autovalori compresi nell'intervallo $[\lambda, \Lambda]$, dove $\lambda > 0$, verifica (9). Infatti

$$F(x, M+P) \,-\, F(x, M) \,=\, \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(M_{ij} + P_{ij}) \,-\, \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} M_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} P_{ij}. \tag{10}$$

Quindi da ([5])

$$(A|P) \,=\, \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} P_{ij} \,=\, tr(AP) \,=\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_A^i \, \lambda_P^i, \tag{11}$$

si deduce

$$\lambda \, \|P\| \,\leq\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_A^i \, \lambda_P^i \,\leq\, n \, \Lambda \, \|P\|. \tag{12}$$

La seguente definizione è stata introdotta invece da Trudinger [53].

---

[3]Per semplicità in questa parte ci limitiamo a considerare operatori non lineari che non dipendono da u e Du.

[4]Scriviamo $P \geq 0$ per indicare che si tratta di una matrice con tutti gli autovalori non negativi (sono reali perché $P \in \mathcal{S}^n$).

[5]Indichiamo con λ_A^i e λ_P^i gli autovalori, rispettivamente, della matrice $\{A_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ e $\{P_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$.

Definizione 2.2. *Diremo che F è uniformemente ellittico nel senso di T (Trudinger) se esistono una costante positiva μ e due funzioni positive λ, Λ definite su Ω con $\lambda(x) \leq \Lambda(x)$ per ogni $x \in \Omega$, tali che per ogni $M, P \in \mathcal{S}^n$, con $P \geq 0$, si ha*

$$\lambda(x)\,(I|P) \;\leq\; F(x, M+P) \;-\; F(x,M) \;\leq\; \Lambda(x)\,(I|P), \tag{13}$$

$$\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)} \;\leq\; \mu, \quad q.o. \quad x \in \Omega. \tag{14}$$

L'operatore lineare $F(D^2u) \;=\; \sum_{i=1}^{n} A_{ij} D_{ij} u$, che abbia la matrice $\{A_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ reale e simmetrica con autovalori compresi nell'intervallo $[\lambda, \Lambda]$, dove $\lambda > 0$, verifica questa definizione. Infatti, tenuto conto di (10) e (11) otteniamo

$$\lambda\,(I|P) \;=\; \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_P^i \;\;\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_A^i\,\lambda_P^i \;\leq\; \Lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_P^i \;=\; \Lambda\,(I|P). \tag{15}$$

La definizione che segue (coercività in una direzione) permette di considerare una categoria di operatori totalmente diversa dalle precedenti. Alcuni di questi formalmente sono molto simili agli operatori ellittici. Viene quindi il dubbio che ci possa essere la possibilità di un confronto tra la *coercività in una direzione* e l'*ellitticità*. Gli esempi che riporteremo ci toglieranno dalla testa velleità di questo tipo.

Definizione 2.3. *(Coercività in una direzione) Diremo che $F(x, M)$ è* corciva in M nella direzione Q, di rango uno *se $Q \in \mathcal{S}^n$ con rank $Q = 1$ e se esistono sue costanti positive m, q tali che*

$$F(x, M + tQ) \geq m|t| - q, \quad t \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathcal{S}^n. \tag{16}$$

Esempio 2.1. *Consideriamo l'operatore $F(D^2u) = \|D^2u\|$. Si tratta di una generalizzazione alle derivate seconde di un operatore "eikonale" derivante dall'ottica geometrica, vedi [31]. Questo operatore verifica la definizione 2.3.*

Infatti se $|t| \;\leq\; \dfrac{q}{m}$ la definizione è banalmente verificata. Sia $|t| > \dfrac{q}{m}$ elevando alla seconda la relazione (16)

$$\|M\|^2 \;+\; 2(M|Q) \;+\; t^2\,\|Q\| \;\geq\; m^2 \;+\; t^2 \;+\; q^2 \;-\; 2\,m\,q\,|t|$$

ovvero

$$(\|Q\|^2 - m^2)\,t^2 \;+\; 2|t|\,[(M|Q) + mq] \;+\; \|M\|^2 - q^2 \geq 0.$$

Imponendo che la radice maggiore risulti maggiore di $\dfrac{q}{m}$ otteniamo

$$\sqrt{[(M|Q) + mq]^2 - (\|M\|^2 - q^2)(\|Q\|^2 - m^2)} \leq \frac{q}{m}(\|Q\|^2 - m^2) + [(M|Q) + mq],$$

da cui segue dopo aver elevato al quadrato e semplificato:

$$0 < \|M + \frac{q}{m}Q\|^2.$$

L'operatore non è invece ellittico nel senso di CNS, infatti poiché

$$F(M+P) - F(M) = \|M+P\| - \|M\|, \tag{17}$$

preso $M = -P$, si ottiene $\|M+P\| - \|P\| = -\|P\|$.
Da questa si deduce che anche la condizione di ellitticità di Trudinger non è verificata.

Il seguente è un altro esempio di un operatore che non è di "natura ellittica" pur sembrandolo, mentre risulta coercivo.

Esempio 2.2. *L'operatore $F(D^2u) = |\Delta u|$ verifica la Definizione (2.3) ma non è ellittico nel senso di CNS o nel senso di T.*

Infatti osserviamo che verifica la Definizione (2.3) nella direzione ([6])

$$e_1 \otimes e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla relazione

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (M_{ii} + t\,Q_{ii}) \right| \geq m\,|t| - q,$$

si ricava

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n} M_{ii} \right) + t \right| \geq m\,|t| - q.$$

Se $|t| \leq \dfrac{q}{m}$ la diseguaglianza è sempre verificata.Mentre se $|t| > \dfrac{q}{m}$, poniamo $b = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_{ii}$.
Sostiuendo sopra $|a+t| \geq m|t| - q$, elevando al quadrato e semplificando (si distingue $t > 0$ e $t < 0$)

$$(1-m^2)t^2 + 2t(a+mq) + a^2 - q^2 \geq 0,$$

da cui (se prendiamo $1 > m$)

$$\sqrt{(a+mq)^2 - (a^2-q^2)(1-m^2)} \leq \frac{q}{m}(1-m^2) + (a+mq),$$

che equivale a

$$0 \leq \left(a + \frac{q}{m}\right)^2$$

[6]Per la definizione di prodotto tensoriale vedi Appendice 1

che, ovviamente, è sempre verificata.
L'operatore non è invece ellittico nel senso di CNS, infatti poiché

$$F(M+P) - F(M) = \| \sum_{i=1}^{n} (M_{ii} + P_{ii}) \| - \| \sum_{i=1}^{n} M_{ii} \|, \tag{18}$$

preso $M = -P$, si ottiene $\| \sum_{i=1}^{n} (M_{ii} + P_{ii}) \| - \| \sum_{i=1}^{n} M_{ii} \| = -\| \sum_{i=1}^{n} P_{ii} \|$. Ovviamente non è verificata nememo la condizione di ellitticità di Trudinger.

Viceversa l'operatore che consideriamo nell'esempio seguente non è coercivo in alcuna direzione.

Esempio 2.3. *(Operatore massimale di Pucci) Siano λ e Λ costanti reali tali che $0 < \lambda \leq \Lambda$. Consideriamo*

$$F(D^2u) = \mathcal{M}^-(D^2u) \quad \text{oppure} \quad F(D^2u) = \mathcal{M}^+(D^2u)$$

dove per ogni $M \in \mathcal{S}^n$ poniamo

$$\mathcal{M}^-(M, \lambda, \Lambda) = \mathcal{M}^-(M) = \lambda \sum_i \lambda_i^+(M) + \Lambda \sum_i \lambda_i^-(M) \tag{19}$$

$$\mathcal{M}^+(M, \lambda, \Lambda) = \mathcal{M}^+(M) = \Lambda \sum_i \lambda_i^+(M) + \lambda \sum_i \lambda_i^-(M), \tag{20}$$

dove λ_i^+ e λ_i^- sono rispettivamente gli autovalori positivi e negativi di M.

L'*operatore di Pucci* non è *coercivo* in alcuna direzione Q.
Infatti è evidente che le diseguaglianze

$$\mathcal{M}^-(M + tQ) \geq m|t| - q, \qquad \mathcal{M}^+(M + tQ) \geq m|t| - q$$

non possono essere verificate dalle matrici M che hanno autovalori $\lambda_i^-(M)$ che tendono a $-\infty$.
L'*operatore di Pucci* risulta invece *uniformemente ellitico nel senso di CNS*. Per verificare questo asserto premettiamo alcune proprietà dell'operatore.

Indichiamo con $\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}$ l'insieme delle matrici simmetriche che hanno gli autovalori compresi tra λ e Λ. Di conseguenza se $A \in \mathcal{S}^n$ si ha

$$A \in \mathcal{A}_{\lambda,\Lambda} \implies \lambda \, \|\xi\|^2 \leq \sum_{ij}^{n} A_{ij} \, \xi_i \, \xi_j \leq \Lambda \, \|\xi\|^2$$

Definiamo in $\mathcal{S}^n$ il seguente operatore lineare

$$L_A M = \sum_{ij}^{n} A_{ij} \, M_{ij} = (A|M) = tr(AM) = \sum_{i}^{n} \lambda^i(A) \, \lambda^i(M) \tag{21}$$

Si dimostra facilmente che

$$\mathcal{M}^-(M,\lambda,\Lambda) = \inf_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} L_A M \tag{22}$$

$$\mathcal{M}^+(M,\lambda,\Lambda) = \sup_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} L_A M, \tag{23}$$

infatti, basta tener conto che

$$\inf_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} L_A M = \inf_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} tr(AM) = \inf_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)\ \lambda_i(M),$$

$$\sup_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} L_A M = \sup_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} tr(AM) = \sup_{A\in\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}} \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)\ \lambda_i(M),$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \lambda_i(A)\ \lambda_i(M) &= \sum_i \lambda_i(A)\ \lambda_i^+(M) + \sum_i \lambda_i(A)\ \lambda_i^-(M)\\ &\leq \Lambda\sum_i\ \lambda_i^+(M) + \lambda\sum_i\ \lambda_i^-(M) = \mathcal{M}^+(M)\\ \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)\ \lambda_i(M) &= \sum_i \lambda_i(A)\ \lambda_i^+(M) + \sum_i \lambda_i(A)\ \lambda_i^-(M)\\ &\geq \lambda\sum_i\ \lambda_i^+(M) + \Lambda\sum_i\ \lambda_i^-(M) = \mathcal{M}^-(M).\end{aligned}$$

In definitiva se M ha h autovalori positivi, k autovalori negativi ($h + k \leq n$) possiamo prendere $\bar{A} \in \mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}$, matrice diagonale, con h elementi uguali a λ e k elementi uguali a Λ, in modo che si abbia

$$\Lambda\sum_i\ \lambda_i^+(M) + \lambda\sum_i\ \lambda_i^-(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\bar{A})\ \lambda_i(M),$$

$$\lambda\sum_i\ \lambda_i^+(M) + \Lambda\sum_i\ \lambda_i^-(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\bar{A})\ \lambda_i(M).$$

Elenchiamo ora alcune proprietà dell'operatore di Pucci.

1. $\mathcal{M}^-(M) \leq \mathcal{M}^+(M)$;
2. $\lambda' \leq \lambda \leq \Lambda \leq \Lambda' \Rightarrow \mathcal{M}^-(M,\lambda',\Lambda') \leq \mathcal{M}^-(M,\lambda,\Lambda)$ e $\mathcal{M}^+(M,\lambda',\Lambda') \geq \mathcal{M}^+(M,\lambda,\Lambda)$;
3. $\mathcal{M}^-(M,\lambda,\Lambda) = -\mathcal{M}^+(-M,\lambda,\Lambda)$;
4. $\mathcal{M}^\pm(\alpha M) = \alpha\mathcal{M}^\pm(M)$ se $\alpha \geq 0$;
5. $\mathcal{M}^+(M) + \mathcal{M}^-(Q) \leq \mathcal{M}^+(M+Q) \leq \mathcal{M}^+(M) + \mathcal{M}^+(Q)$;

6. $\mathcal{M}^-(M) + \mathcal{M}^-(Q) \le \mathcal{M}^-(M+Q) \le \mathcal{M}^-(M) + \mathcal{M}^+(Q)$;

7. $P \ge 0 \Rightarrow \lambda\|P\| \le \mathcal{M}^-(P) \le \mathcal{M}^+(P) \le n\Lambda\|P.\|$

Dimostrazione. (1),(2),(3),(4) sono ovvie. (5), (6) seguono dalle (22) e (23). (7) segue direttamente dalle definizioni di $\mathcal{M}^-$ e $\mathcal{M}^+$. Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato

Proposizione 2.1. *L'operatore massimale di Pucci è uniformemente ellittico nel senso di CNS con costanti λ e $n\,\Lambda$.*

Dimostrazione. Dalla proprietà (7) e (5) segue che per ogni M, $P \in \mathcal{S}^n$, $P \ge 0$

$$\lambda\|P\| \le \mathcal{M}^-(P) \le \mathcal{M}^+(M+P) - \mathcal{M}^+(M) \le \mathcal{M}^+(P) \le n\,\Lambda\|P\|.$$

Mentre da (6) e (7) segue che per ogni M, $P \in \mathcal{S}^n$, $P \ge 0$

$$\lambda\|P\| \le \mathcal{M}^-(P) \le \mathcal{M}^-(M+P) - \mathcal{M}^-(P) \le \mathcal{M}^+(P) \le n\,\Lambda\|P\|.$$

Osservazione 2.1. *L'operatore massimale di Pucci $\mathcal{M}^-$ è concavo mentre $\mathcal{M}^+$ è convesso.*

Dimostrazione.
$\forall M, Q \in \mathcal{S}^n$ per (6) e (4) si ha

$$\mathcal{M}^-(tM + (1-t)Q) \ge \mathcal{M}^-(tM) + \mathcal{M}^-((1-t)Q) \ge t\mathcal{M}^-(M) + (1-t)\mathcal{M}^-(Q);$$

$$\mathcal{M}^+(tM + (1-t)Q) \le \mathcal{M}^+(tM) + \mathcal{M}^+((1-t)Q) \le t\mathcal{M}^+(M) + (1-t)\mathcal{M}^+(Q).$$

Osservazione 2.2. *L'operatore massimale di Pucci è anche uniformemente ellittico nel senso di T.*

Dimostrazione.
È sufficiente osservare che $\|P\| \le (I|P) \le \sqrt{n}\,\|P\|$.

Terminiamo questo paragrafo con la seguente Condizione di ellitticità che non è altro che la versione per operatori non lineari della condizione di Campanato vista in precedenza per gli operatori lineari.

Definizione 2.4. *(Condizione A_x) Diremo che l'operatore F soddisfa la condizione A_x se esistono due costanti reali γ, δ, con $\gamma > 0$, $\delta \ge 0$ e $\gamma + \delta < 1$, una funzione misurabile e positiva $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ ed una funzione $B(x) : \Omega \to \mathcal{S}^n$, con $B(x) > 0$ tali che*

$$|(B(x)|Q) - \alpha(x)\,[F(x, M+Q) - F(M)]| \le \gamma\,\|Q\| + \delta\,|(B(x)|Q)|, \qquad (24)$$
$$\text{per ogni } M, Q \in \mathcal{S}^n, \text{ per q.o. } x \in \Omega.$$

I seguenti teoremi ci consentono un confronto tra le varie definizioni di elitticità che abbiamo enunciato.

Teorema 2.1. *Se F verifica la Condizione A_x con $0 < C_1 \leq \alpha(x) \leq C_2$ e $B(x) = I$ allora F è uniformemente ellittica nel senso di CNS.*

Dimostrazione. Dalla maggiorazione (24) segue, per tutte le matrici $M, P \in \mathcal{S}$ $P \geq 0$

$$\frac{(1-\delta)(I|P) - \gamma\|P\|}{\alpha(x)} \leq F(x, M+P) - F(x, M) \leq \frac{\gamma\|P\| + (1+\delta)(I|P)}{\alpha(x)},$$

se poi indichiamo con $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ gli autovalori di P, si ottiene

$$(I|P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|P\|$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|P\| \, \frac{1-\delta-\gamma}{C_2} \; \leq \|P\| \; \frac{1-\delta-\gamma}{\alpha(x)} \leq F(x, M+P) - F(x, M) \leq \\ \leq \frac{1+\gamma\sqrt{n}+\delta}{\alpha(x)} \; \|P\| \leq \frac{(1+\delta)\sqrt{n}+\gamma}{C_1} \, \|P\|. \end{aligned}$$

Il viceversa è precisato dal seguente teorema.

Teorema 2.2. *Se F è uniformemente ellittico nel senso di CNS allora soddisfa la* Condizione *A_x per tutte le funzioni $B(x) : \Omega \to \mathcal{S}^n$, tali che*

$$\theta(x)\,\|P\| \leq (B(x)|P) \leq \Theta(x)\,\|P\|, \quad \forall P \in \mathcal{S}^n, \;\; P \geq 0, \tag{25}$$

(dove $0 < \theta(x) \leq \Theta(x)$) purché esista $\alpha(x)$ tale che

$$\sup_{\Omega} \; \sqrt{(\Theta(x) - \alpha(x)\lambda)^2 + (\theta(x) - \alpha(x)\Lambda)^2} < 1 \tag{26}$$

Per dimostrare l'asserto dobbiamo premettere il seguente Lemma.

Lemma 2.1. *F è uniformemente ellittico nel senso di CNS se e solo se*

$$\lambda\|Q^+\| - \Lambda\|Q^-\| \leq F(x, M+Q) - F(x, M) \leq \Lambda\|Q^+\| - \lambda\|Q^-\|, \qquad M, Q \in \mathcal{S}^n, \forall x \in \Omega. \tag{27}$$

F è uniformemente ellittico nel senso di T se e solo se

$$\lambda\,(I|Q^+) - \Lambda(I|Q^-) \leq F(x, M+Q) - F(x, M) \leq \Lambda(I|Q^+) - \lambda(I|Q^-), \qquad M, Q \in \mathcal{S}^n, \forall x \in \Omega. \tag{28}$$

Dimostrazione.
Ricordiamo che ogni matrice $Q \in \mathcal{S}^n$ può essere decomposta in un'unica maniera nella somma $Q = Q^+ - Q^-$, dove Q^+, $Q^- \geq 0$ e $Q^+Q^- = 0$. ([7])
Ponendo $R = M - Q^-$ si ha:

$$\begin{aligned} F(x, M+Q) - F(x, M) &= F(x, M + Q^+ - Q^-) - F(x, M) = \\ &= F(x, R + Q^+) - F(x, R) + F(x, R) - F(x, M) = \qquad (29) \\ &= F(x, R + Q^+) - F(x, R) + F(x, R) - F(x, R + Q^-). \qquad (30) \end{aligned}$$

Applicando alla (30) le diseguaglianze (9) e (14) si ottiene rispettivamente

$$F(x, M+Q) - F(x, M) \leq \Lambda\|Q^+\| - \lambda\|Q^-\|$$
$$F(x, M+Q) - F(x, M) \geq \lambda\|Q^+\| - \Lambda\|Q^-\|.$$

e

$$F(x, M+Q) - F(x, M) \leq \Lambda(I|Q^+) - \lambda(I|Q^-)$$
$$F(x, M+Q) - F(x, M) \geq \lambda(I|Q^+) - \Lambda(I|Q^-).$$

Dimostrazione. Teorema 2.2.
Per la maggiorazione (27) applicata all'operatore $G(x, M) = (B(x)|M)$ otteniamo

$$\theta(x)\|Q^+\| - \Theta(x)\|Q^-\| \leq (B(x)|Q) \leq \Theta(x)\|Q^+\| - \theta(x)\|Q^-\|.$$

da cui, sempre per la maggiorazione (27) applicata all'operatore F si ha:

$$\begin{aligned} &(\theta(x) - a(x)\Lambda)\|Q^+\| + (a(x)\lambda - \Theta(x))\|Q^-\| \leq \\ \leq\ &(B(x)|Q) - a(x)[F(x, M+Q) - F(x, M)] \leq \\ \leq\ &(\Theta(x) - a(x)\lambda)\|Q^+\| + (a(x)\Lambda - \theta(x))\|Q^-\| \leq \\ \leq\ &\sqrt{(\Theta(x) - a(x)\lambda)^2 + (\theta(x) - a(x)\Lambda)^2}\ \|Q\|, \end{aligned} \qquad (31)$$

da questo segue la *Conditions* A_x in quanto presi $\delta = 0$, $a(x) > 0$, esiste γ tale che

$$\gamma = \sup_{\Omega} \sqrt{(\Theta(x) - a(x)\lambda)^2 + (\theta(x) - a(x)\Lambda)^2} < 1.$$

□

Corollario 2.1. *Sia* $n \leq 5$ *e* $\dfrac{n-1}{2\sqrt{n}} \leq \dfrac{\lambda}{\Lambda}$. *Se* F *è uniformemente ellittico nel senso di CNS 9, allora soddisfa la* Condizione A_x *con* $B(x) = I$.

[7] Basta diagonalizzare Q come segue $Q = RR^*QRR^* = R\Lambda_Q R^*$, con Λ_Q matrice avente sulla diagonale gli autovalori di Q ed R matrice unitaria.Possiamo scomporre $\Lambda_Q = \Lambda_Q^+ + \Lambda_Q^-$

Dimostrazione. Basta prendere nella dimostrazione del Teorema 2.2 $B(x) = I$, allora $\Theta = \sqrt{n}$ e $\theta = 1$. così $\gamma = \sqrt{(\sqrt{n} - a\lambda)^2 + (1 - a\Lambda)^2} < 1$ se $\dfrac{n-1}{2\sqrt{n}} \leq \dfrac{\lambda}{\Lambda}$. Inoltre $\dfrac{\lambda}{\Lambda} < 1$, questo implica $n \leq 5$. $\square$

Teorema 2.3. *Se F verifica la* Condizione A_x *con $B(x) = I$ allora F è uniformemente ellittico nel senso di T.*

Dimostrazione. Da (24) segue per tutte le matrici $M, Q \in \mathcal{S}^n$ $Q \geq 0$

$$\frac{(1-\delta)(I|Q) - \gamma\|Q\|}{a(x)} \leq F(x, M+Q) - F(x, M) \leq \frac{\gamma\|Q\| + (1+\delta)(I|Q)}{a(x)},$$

e quindi

$$(I|Q)\ \frac{1-\delta-\gamma}{a(x)} \leq F(x, M+Q) - F(x, M) \leq \frac{1+\delta+\sqrt{n}\gamma}{a(x)}\ (I|Q).$$

$\square$

Teorema 2.4. *Sia $F : \Omega \times \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$ misurabile in x e continuo nelle altre variabili. Se F è uniformemente ellittico, nel senso di T, con $\lambda(x)$, $\Lambda(x)$ che sodddisfano*

$$\frac{n - \sqrt{2n-1}}{n-1} \leq \frac{\lambda(x)}{\Lambda(x)}. \tag{32}$$

allora soddisfa la condizione A_x con $B(x) = I$, $\alpha(x) = \dfrac{[\lambda(x) + \Lambda(x)]^2}{\lambda(x)^2 + \Lambda(x)^2}$, $\sqrt{[\alpha(x)\Lambda(x) - 1]^2 + [\alpha(x)\lambda(x) - 1]^2}\,\sqrt{n}$ e $\delta = 0$.

Dimostrazione. Prendiamo $a(x) > 0$ e, per il Lemma (2.1), possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&-\Lambda(x)\,\alpha(x)(I|Q^-) + \lambda(x)\,\alpha(x)\,(I|Q^+) - (I|Q^+) + (I|Q^-) \leq \\
&\leq \alpha(x)[F(x, M+Q) - F(x, M)] - (I|Q) \leq \\
&\leq \alpha(x)\,\Lambda(x)(I|Q^+) - \alpha(x)\lambda(x)(I|Q^-) - (I|Q^+) + (I|Q^-), \\
&\forall M, Q \in \mathcal{S}^n,\ \forall x \in \Omega,
\end{aligned}$$

e allora

$$\begin{aligned}
&|(I|Q) - \alpha(x)[F(x, M+Q) - F(x, M)]| \leq \\
&\leq \max\{|[\alpha(x)\Lambda(x) - 1](I|Q^+) + [1 - \alpha(x)\lambda(x)](I|Q^-)|,\ |[\alpha(x)\Lambda(x) - 1](I|Q^-) + \\
&+[\alpha(x)\lambda(x) - 1](I|Q^+)|\} \leq \\
&\leq \sqrt{[\alpha(x)\Lambda(x) - 1]^2 + [\alpha(x)\lambda(x) - 1]^2}\sqrt{(I|Q^+)^2 + (I|Q^-)^2} \leq \\
&\leq \sqrt{[\alpha(x)\Lambda(x) - 1]^2 + [\alpha(x)\lambda(x) - 1]^2}\,\sqrt{n}\,\|Q\| \\
&M, Q \in \mathcal{S}^n,\ \forall x \in \Omega.
\end{aligned}$$

Otteniamo la tesi osservando che

$$\sqrt{[\alpha(x)\Lambda(x) - 1]^2 + [\alpha(x)\lambda(x) - 1]^2}\,\sqrt{n} < 1 \quad \text{quando} \qquad \alpha(x) = \frac{[\lambda(x) + \Lambda(x)]^2}{\lambda(x)^2 + \Lambda(x)^2}$$

purché

$$\frac{n - \sqrt{2n-1}}{n-1} \leq \frac{\lambda(x)}{\Lambda(x)}.$$

$\square$

Chiudiamo questo paragrafo con un paio di esempi di operatori totalmente non lineari che verificano alcune delle definizioni date in precedenza.

L'equazione di Belmann che vedremo nel prossimo esempio, deriva dai problemi del costo costo ottimale nei problemi di controllo stocastico, vedi[35]. Essa è analoga all'operatore estremale di Pucci, con la differenza che la famiglia $\mathcal{A}_{\lambda,\Lambda}$ è sostituita da una **generica famiglia $\mathcal{A}$ di operatori ellittici lineari**.

Esempio 2.4. *(Equazione di Belmann)*

$$F(x, D^2u) = inf_{\alpha\in\mathcal{I}}\,[L_\alpha u(x) - f_\alpha(x)] = 0. \tag{33}$$

dove $\mathcal{I}$ è un insieme, f_α è una funzione reale su Ω per ogni $\alpha \in \mathcal{I}$, e $L_\alpha u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{\alpha}(x)\, D_{ij}u$ è uniformemente ellittico con coefficienti misurabili. Se $\{a_{ij}^{\alpha}(x)\}_{ij}$ ha autovalori in $[\lambda, \Lambda]$ $(0 < \lambda \leq \Lambda)$ per ciascun $x \in \Omega$ ed $\alpha \in \mathcal{I}$ allora allora l'operatore di Bellman è uniformemente ellittico nel senso di CNS, ed è concavo in M. La dimostrazione di questi asserti è sostanzialmente quella vista sopra per l'*operatore di Pucci*. Notiamo inoltre che sotto le ipotesi del ipotesi del Corollario 2.1 su λ e Λ l'*operatore di Bellmann* verifica la *Condizione* A_x. Inoltre è anche ellittico nel senso di T. Si osservi che se $a_{ij}^{\alpha}(x)$ e $f(x)$ sono costanti l'equazione di Bellmann assume la forma $F(D^2u) = 0$.

Chiudiamo il paragrafo con un esempio derivante dalla teoria dei giochi (vedi [43])

Esempio 2.5. *(Equazione di Issac)*

$$F(x, D^2u) = \sup_{\beta}\ \inf_{\alpha}[L_{\alpha\beta}\, u(x)\ -\ f_{\alpha\beta}\,(x)] = 0$$

Dove $L_{\alpha\beta}$ è una famiglia di operatori ellittici con coefficienti misurabili, limitati e con costanti di ellitticità λ e Λ $(0 < \lambda \leq \Lambda)$, mentre α e β variano in due diversi insiemi di indici.Si dimostra che l'*operatore di Isaac* é uniformemente ellittico, sia nel senso di CNS che di T, in modo del tutto analogo ai casi precedenti. Da questo, sotto opportune ipotesi su λ e Λ, si ottiene anche che verifica la *Condizione* A_x con $B(x) = I$.

3 Teoria degli operatori vicini: introduzione.

Il concetto di *vicinanza* tra operatori introdotto da Campanato è contenuto nella seguente definizione

Definizione 3.1. *Siano $\mathcal{X}$ un insieme e $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach con norma $\|\cdot\|$, A e B due operatori tali che $A, B : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$. Diremo che A è vicino a B, se esitono due costanti positive α, k, con $0 < k < 1$, tali che per ogni $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ si abbia:*

$$\|B(x_1) - B(x_2) - \alpha[A(x_1) - A(x_2)]\| \leq k\|B(x_1) - B(x_2)\| . \tag{34}$$

Ovviamente: *ogni operatore è vicino a sè stesso.* Infatti basta prendere nella diseguaglianza (34): $0 < \alpha < 2$ e $K = |1 - \alpha|$.
Il punto di partenza della *teoria degli operatori vicini* è il seguente teorema che è stato dimostrato da Campanato, prima nel caso di due spazi di Hilbert (vedi [11]), e poi nella forma seguente (vedi [8]).

Teorema 3.1. *Sia $\mathcal{X}$ un insieme, $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach con norma $\|.\|$, A, B siano due operatori tali che: $A, B : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$, inoltre sia A* vicino *a B . Sotto queste ipotesi, se B è una* bigezione *tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{B}$, A è anche una bigezione tra $\mathcal{X}$ e $\mathcal{B}$.*

4 Teoria degli operatori vicini: breve storia.

L'idea di introdurre il concetto di *vicinanza tra operatori* trova la sua origine nel problema di dimostrare l'esistenza ed unicità di soluzioni di problemi non variazionali del tipo seguente.

$$\begin{cases} u \in H^2 \cap H^1_0(\Omega) \\ F(x, D^2(u)) = f, \end{cases} \tag{35}$$

dove: $f \in L^2(\Omega)$, $H(u) = \{D_{ij}u\}_{i,j=1,\cdots,n}$, Ω è un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$, che per semplicità supporremo, in questa parte, convesso. $F : \Omega \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile che è limitata rispetto alla prima variabile, continua rispetto alla seconda e verifica una particolare condizione di ellitticità (detta *Condizione A*, che abbiamo già incontrata nei paragrafi precedenti). Ricordiamo che, perfino nel caso lineare $F(x, D^2u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_{ij}u$, il Problema (35) non è ben posto in generale sotto le sole ipotesi di ellitticità uniforme sulla matrice dei coefficienti (vedi esempio alla fine del paragrafo), ovvero esiste $\nu > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j \geq \nu\|\eta\|_n^2 \quad , \quad \forall \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{36}$$

Sono dunque necessarie delle ipotesi più restrittive della (36) per provare l'esistenza ed unicità delle soluzioni del Problema (35). Una di queste è appunto, come abbiamo già detto la *Condizione A*, che è stata suggerita da uno dei metodi naturali con i quali questi problemi sono risolti di solito, ovvero il teorema del punto fisso. Consideriamo infatti l'equazione

$$\Delta u = \alpha f + \Delta w - \alpha F(x, D^2 w) \tag{37}$$

e definiamo un'applicazione $\mathcal{T} : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ che associa ad ogni $w \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ la soluzione $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ dell'equazione (37).
Si può provare che $\mathcal{T}$ è una contrazione dello spazio $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ in sè se $F(x, \cdot)$ verifica la *Condizione A*. Infatti:[8]

$$\|\mathcal{T}(w_1) - \mathcal{T}(w_2)\|^2_{H^{2,2}(\Omega)} \leq \int_\Omega |\Delta u_1 - \Delta u_2|^2 \, dx =$$

$$= \int_\Omega |\Delta w_1 - \alpha F(x, D^2 w_1) - [\Delta w_2 - \alpha F(x, D^2 w_2)]|^2 \, dx =$$

$$= \int_\Omega |\Delta w_1 - \Delta w_2 - \alpha [F(x, D^2 w_1) - F(x, D^2 w_2)]|^2 \, dx \leq$$

$$(\text{per la } \textit{Condizione A})$$

$$\leq \left[\gamma \|w_1 - w_2\|_{H^{2,2}(\Omega)} + \delta \, |\Delta(w_1 - w_2)|\right]^2 \leq$$

$$(\text{per la maggiorazione di Miranda} - \text{Talenti})$$

$$\leq (\gamma + \delta)^2 \, \|w_1 - w_2\|^2_{H^{2,2}(\Omega)}$$

Da questa si deduce che $\mathcal{T}$ è una contrazione e quindi si ottiene il risultato desiderato. Le dimostrazione del Teorema 3.1 ripercorre in sostanza questa strada, la cui astrazione si fa nel modo che segue:

$$\begin{aligned}
Bu &= \Delta u \\
A(u) &= F(x, H(u)) \\
\mathcal{X} &= H^2 \cap H_0^1(\Omega) \\
\mathcal{B} &= L^2(\Omega)
\end{aligned}$$

Ovvero si può dedurre che l'operatore $u \mapsto F(\cdot, D^2 u)$ è una bigezione tra $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ ed $L^2(\Omega)$ come conseguenza dei seguenti fatti:

1. $F(., D^2 u)$ è in una certa relazione algebrica con Δ
2. Δu è un *bigezione* tra $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ ed $L^2(\Omega)$.

[8] Si tenga presente la seguente maggiorazione Miranda- Talenti (vedi ,[41], [42], [46]): se Ω è convesso, allora

$$\|u\|_{H^{2,2}(\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Le precedenti osservazioni sono sostanzialmente il metodo di appplicazione della *teoria degli operatori vicini*: in sostanza dalla *Condizione* A abbiamo ottenuto che A è *vicino* a B , mentre dal Teorema 3.1, poichè B è una *bigezione* tra gli spazi considerati anche A è una *bigezione* tra di essi (vedi [13]).

Vediamo ora il seguente controesempio ([9])
Sia $\Omega = S(0, r)$. Consideriamo l'equazione

$$A(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, D_{ij}u(x) = 0, \tag{38}$$

dove

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij} + b\frac{x_i\, x_j}{\|x\|^2},\;\; b = -1 + \frac{n-1}{1-\lambda},\;\; \lambda < 1,\;\; x \in \mathbb{R}^n. \tag{39}$$

La matrice è uniformemente ellittica su Ω :

$$\sum_{ij=1}^{n} \left(\delta_{ij} + b\frac{x_i x_j}{\|x\|^2}\right) \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b\frac{x_i x_j \xi_i \xi_j}{\|x\|^2} =$$
$$= \|\xi\|^2 \left(1 + b\sum_{ij=1}^{n} \frac{x_i x_j \xi_i \xi_j}{\|x\|^2\, \|\xi\|^2}\right) > c\|\xi\|^2,\;\; (c > 0)$$

perchè $b > -1$ e

$$\sum_{ij=1}^{n} \frac{x_i x_j \xi_i \xi_j}{\|x\|^2\, \|\xi\|^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i\right)^2}{\|x\|^2 \|\xi\|^2} \leq 1.$$

La funzione

$$u(x) = \|x\|^\lambda \tag{40}$$

È una soluzione di (38), perché:

$$\begin{aligned} D_i u(x) &= \lambda\, \|x\|^{\lambda-2}\, x_i \\ D_{ij} u(x) &= \lambda\, \|x\|^{\lambda-4}\, [(\lambda-2) x_i\, x_j + \delta_{ij}\, \|x\|^2]. \end{aligned}$$

Inoltre

$$D_i u \in L^q(S(0,r)) \quad \text{if} \quad q < \frac{n}{1-\lambda}$$

mentre

$$D_{ij} u \in L^p(S(0,r)) \quad \text{if} \quad p < \frac{n}{2-\lambda}.$$

Se $\lambda \longrightarrow 1^-$ allora $p \longrightarrow n$ e $q \longrightarrow +\infty$. Così che per valori di λ vicini ad 1 abbiamo che $u \in H^{2,2}(\Omega)$, purché $n > 2$.
Ricordiamo anche che la funzione $v(x) = r^\lambda$ è una soluzione di (38). Il problema non ha quindi unicità di soluzione.

[9] Vedi [38],[?]

5 Teoria degli operatori vicini: sviluppo.

Siano $\mathcal{X}$ un insieme e $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach con norma $\|\cdot\|$, A e B due operatori tali che $A, B : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$.

Lemma 5.1. *Sia A vicino a B. Valgono le seguenti maggiorazioni:*

$$\|B(x_1) - B(x_2)\| \leq \frac{\alpha}{1-k}\|A(x_1) - A(x_2)\| \tag{41}$$

$$\|A(x_1) - A(x_2)\| \leq \frac{k+1}{\alpha}\|B(x_1) - B(x_2)\| \tag{42}$$

La dimostrazione del Lemma è una banale conseguenza della maggiorazione (34)

Teorema 5.1. *Sia A vicino a B. L'operatore A è iniettivo se e solo se è iniettivo l'operatore B*

La dimostrazione segue dalle maggiorazioni (41) e (42) del Lemma 5.1.

Teorema 5.2. *Sia A vicino B. Se B è bigettivo allora anche A è bigettivo.*

Alla dimostrazione di questo Teorema vanno premessi i seguenti Lemmi

Lemma 5.2. *Sia $B : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ operatore iniettivo allora $\mathcal{X}$ è uno spazio metrico con la metrica indotta*

$$d_{\mathcal{X}}(u, v) = \|B(u) - B(v)\|_{\mathcal{B}}, \quad \forall u, v \in \mathcal{X}. \tag{43}$$

La dimostrazione di questo asserto è ovvia.

Lemma 5.3. *Sia $B : \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ operatore bigettivo allora $\mathcal{X}$ è uno spazio metrico completo con la metrica indotta (43).*

Dimostrazione. Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $\{\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}}\}$, ovvero $\{B(u_n)\}_{n\in\mathcal{B}}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{B}$, e quindi esiste $U_\infty \in \mathcal{B}$ tale che

$$\|B(u_n) - U_\infty\|_{\mathcal{B}} \to 0.$$

Sia u_∞ tale che $u_\infty = B^{-1}(U_\infty)$. Quindi

$$d_{\mathcal{X}}(u_n, u_\infty) = \|B(u_n) - U_\infty\|_{\mathcal{B}} \to 0.$$

□

Dimostrazione. (Del Teorema 5.2).
L'iniettività è conseguenza del Teorema 5.1. Vediamo la *surgettività.*
Per ogni $f \in \mathcal{B}$ dobbiamo dimostrare l'esistenza di soluzione $u \in \mathcal{X}$ dell'equazione

$$A(u) = f, \tag{44}$$

ovvero

$$B(u) = B(u) - \alpha A(u) + \alpha f = F(u).$$

Ma per ogni $u \in \mathcal{X}$ abbiamo che $F(u) \in \mathcal{B}$ e quindi esiste uno ed un solo $U = \mathcal{T}u \in \mathcal{X}$ tale che

$$B(U) = F(u). \tag{45}$$

In questo modo abbiamo costruito un applicazione $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ che è una contrazione di $\mathcal{X}$ in sè. Infatti, se $u, v \in \mathcal{X}$ e $U = \mathcal{T}(u)$, $V = \mathcal{T}(v)$ allora

$$\begin{aligned} & d_{\mathcal{X}}(U, V) \;=\; \|B(U) \;-\; B(V)\|_{\mathcal{B}} \;=\; \|F(u) - F(v)\|_{\mathcal{B}} = \\ & \|B(u) \;-\; B(v) \;-\; \alpha\,[A(u) \;-\; A(v)]\|_{\mathcal{B}} \;\leq\; K\,\|B(u) \;-\; B(v)\|_{\mathcal{B}} \;=\; K\,d_{\mathcal{X}}(u, v) \end{aligned} \tag{46}$$

D'altra parte per il Lemma 5.3, lo spazio $\{\mathcal{X},\, d_{\mathcal{X}}\}$ è completo. Quindi, per il *teorema delle contrazioni* esiste uno ed un solo $U \in \mathcal{X}$ che risolve (45), e quindi esiste uno ed un solo $u \in \mathcal{X}$ che risolve (44). Abbiamo così provato che A è anche bigettiva. □

Teorema 5.3. *Sia A vicino a B. L'operatore A è surgettivo se e solo se è surgettivo l'operatore B*

Dimostrazione. Definiamo sull'insieme $\mathcal{X}$ la relazione di equivalenza $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ nel seguente modo

$$u\,\mathcal{R}_{\mathcal{X}}\,v \iff B(u) = B(v).$$

Indichiamo con $[u]_{\mathcal{X}}$ la classe di equivalenza di u e sia $X = \mathcal{X}/\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$. Definiamo A^* e B^* le applicazioni da X in $\mathcal{B}$ come segue

$$B^*([u]_{\mathcal{X}}) \;=\; B(u), \qquad A^*([u]_{\mathcal{X}}) = A(u)$$

A^* è anch'essa vicina a B^* con costanti α, K e B^* è bigettiva. Quindi A^* è anche bigettiva, ovvero A è surgettiva. □

6 Teoria degli operatori vicini: Teoremi di immagine aperta e di immagine densa.

Sia Ω_1 un sottoinsieme aperto di $\mathcal{B}$ e $\Phi : \Omega_1 \to \mathcal{B}$. Poniamo $\Omega_2 = \Phi(\Omega_1)$. Supponiamo anche che Φ sia *vicino* alla restrizione di I (funzione identità su $\mathcal{B}$) a Ω_1, ovvero

$$\begin{gathered} \exists \alpha > 0 \;\text{ e }\; K \in (0,1) \;\text{ tali che }\; \forall y_1,\, y_2 \in \Omega_1 \\ \|y_1 - y_2 - \alpha[\Phi(y_1) - \Phi(y_2)]\| \leq K\|y_1 - y_2\|. \end{gathered} \tag{47}$$

Lemma 6.1. *Nell'ipotesi che valga (47), se $0 \in \Omega_1$ e $\Phi(0) = 0$ allora esiste $\sigma_1 > 0$ tale che $S(0, \sigma_1) \subset \Omega_2$.*

Dimostrazione. Dimostrare le tesi equivale a provare che esiste una sfera di centro 0 e raggio σ_1 tale che per ogni $y \in S(0, \sigma_1)$ possiamo determinare $x \in \Omega_1$ per cui $\Phi(x) = y$. Sia r un numero positivo tale che $S(0, r) \subset \Omega_1$. Scegliamo $y \in S(0, \sigma)$, con $0 < \sigma < r$, e consideriamo l'applicazione $\mathcal{I} : S(0, r) \to \mathcal{B}$ definita nel modo seguente:

$$\mathcal{I}(x) = y - [\alpha\Phi(x) - x], \;\; x \in S(0, r).$$

$\mathcal{I}$ verifica le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{I}(S(0, r)) \subset S(0, r)$. infatti:

   $$\|\mathcal{I}(x)\| = \|y - [\alpha\Phi(x) - x]\| \leq \|y\| + \|\alpha[\Phi(x) - \Phi(0)] - (x - 0)\|.$$

   Da questa stima e da (47), otteniamo che esiste $K \in (0, 1)$ tale che

   $$\|\mathcal{I}(x)\| \leq \|y\| + K\|x\| \leq \sigma + K\,r \leq r, \;\; \text{per} \;\; \sigma \leq (1 - K)r.$$

2. $\|\mathcal{I}(x_1) - \mathcal{I}(x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|, \; \forall x_1, x_2 \in S(0, r)$. Infatti, per mezzo della diseguaglianza (47) possiamo dedurre

   $$\|\mathcal{I}(x_1) - \mathcal{I}(x_2)\| = \|x_1 - x_2 - \alpha[\Phi(x_1) - \Phi(x_2)]\| \leq K\,\|x_1 - x_2\|$$

   $\forall x_1, x_2 \in S(0, r)$ e $K \in (0, 1)$.

Da questa e dal *teorema delle contrazioni,* possiamo dedurre che esiste un'unica $x \in S(0, r)$ tale che $\mathcal{I}(x) = x$, ovvero: $y - \alpha\Phi(x) + x = x$. In definitiva, per ogni $y \in S(0, \sigma)$ (con $\sigma \leq (1-K)r$) esiste $x \in S(0, r)$ tale che $y = \alpha\Phi(x)$. Otteniamo cosi' che per ogni $y \in S(0, \sigma_1)$, con $\sigma_1 = \dfrac{\sigma}{\alpha}$, possiamo determinare uno ed un solo $x \in S(0, r)$ tale che $y = \Phi(x)$.

□

Lemma 6.2. *Nell'ipotesi (47),se Ω_1 è aperto in $\mathcal{B}$, allora anche Ω_2 è aperto in $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. La tesi si ottiene provando che per ogni $y_0 \in \Omega_2$ esiste $S(y_0, \sigma_1)$contenuto in Ω_2. Sia dunque $x_0 \in \Omega_1$ tale che $y_0 = \Phi(x_0)$. Poniamo:

$$\begin{aligned}\Omega_{01} = \{z \in \mathcal{B} : z = x - x_0, \; x \in \Omega_1\} \; &= \; \Omega_1 - x_0, \\ \Omega_{02} = \{z \in \mathcal{B} : z = y - y_0, \; y \in \Omega_2\} \; &= \; \Omega_2 - y_0, \\ \Phi_0(z) = \Phi(z + x_0) - \Phi(x_0), \; z &\in \Omega_{01}.\end{aligned}$$

È ovvio che $\Phi_0 : \Omega_{01} \to \mathcal{B}$, $\Omega_{02} = \Phi_0(\Omega_{01})$, Ω_{01} è aperto, $0 \in \Omega_{01}$, $\Phi_0(0) = 0$.
Inoltre Φ verifica le ipotesi (47), lo stesso vale per Φ_0. Infatti, per ogni $z_1, z_2 \in \Omega_{01}$ abbiamo:

$$\|z_1 - z_2 - \alpha[\Phi_0(z_1) - \Phi_0(z_2)]\| = \|(z_1 + x_0) - (z_2 + x_0) - \alpha[\Phi(z_1 + x_0) - \Phi(z_2 + x_0)]\| \leq K\|z_1 - z_2\|.$$

Valgono dunque le ipotesi del Lemma (6.1) per Ω_{01} e Φ_0, di conseguenza esistono $S(0, \sigma_1) \subset \Omega_{02}$ e $S(y_0, \sigma_1) \subset \Omega_2$. □

Osservazione 6.1. *Il Lemma 6.2 è falso se assumiamo su Φ la sola ipotesi di lipschitzianità.*

Esempio.
Sia:
$\Omega_1 = \mathcal{B} = l^2$, $\Omega_2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in \mathcal{B},\ x_1 = 0\}$,
$\Phi(x_1, \cdots, x_n, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$.
Φ è un'isometria, Ω_1 è aperto, mentre Ω_2 non lo è. D'altra parte, Φ non è vicino a I perché (47) è falsa sui punti $y_1 = (x_1, 0, \cdots, 0, \cdots)$ e $y_2 = (0, \cdots, 0)$ per ogni α e K.

Lemma 6.3. *Nell'ipotesi (47),se Ω_1 è denso in $\mathcal{B}$, allora anche Ω_2 è denso in $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Se $\Omega_1 = \mathcal{B}$ non c'è niente da provare. Sia allora $\Omega_1 \subsetneq \mathcal{B}$.
Fissato $y \in \mathcal{B} \setminus \Omega_1$, sia $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega_1$ sia tale che $y_n \longrightarrow y$ in $\mathcal{B}$. In particolare $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di cauchy in $\mathcal{B}$. Da questo segue, essendo Φ *vicino* a I, che $\{\Phi(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successone di Cauchy in $\mathcal{B}$. Infatti

$$\begin{aligned}\|\Phi(y_n) - \Phi(y_m)\| &\leq \frac{1}{\alpha}\|y_n - y_m - \alpha[\Phi(y_n) - \Phi(y_m)]\| + \frac{1}{\alpha}\|y_n - y_m\| \leq \\ &\leq \frac{k+1}{\alpha}\|y_n - y_m\|, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Poniamo

$$\bar{\Phi}(y) = \begin{cases} \Phi(y) & \text{se } y \in \Omega_1, \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(y_n) & \text{se } y \notin \Omega_1. \end{cases} \tag{48}$$

$\bar{\Phi} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ è un'applicazione ben definita, perchè se $\{\bar{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un'altra successione in Ω_1 che converge a y, si ha che, tenuto anche conto del fatto che Φ è *vicino* a I, otteniamo

$$\begin{aligned}\|\Phi(y_n) - \Phi(\bar{y}_n)\| &\leq \frac{1}{\alpha}\|y_n - \bar{y}_n - \alpha[\Phi(y_n) - \Phi(\bar{y}_n)]\| + \frac{1}{\alpha}\|y_n - \bar{y}_n\| \leq \\ &\leq \frac{k+1}{\alpha}\|y_n - \bar{y}_n\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Da cui $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(\bar{y}_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} = \bar{\Phi}(y)$.
Proviamo ora che $\bar{\Phi}$ è vicino a I. Per ogni $y, z \in \mathcal{B}$ siano $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni in Ω_1 che convergono rispettivamente a y e a z. Poiché Φ è vicino a I, otteniamo le stime seguenti

$$\begin{aligned}\|y - z - \alpha[\bar{\Phi}(y) - \bar{\Phi}(z)]\| &\leq \|y - y_n\| + \|z - z_n\| + \\ + \|y_n - z_n - \alpha[\Phi(y_n) - \Phi(z_n)]\| &+ \alpha\|\Phi(y_n) - \bar{\Phi}(y)\| + \alpha\|\Phi(z_n) - \bar{\Phi}(z)\|.\end{aligned}$$

Otteniamo da questa e dalla definizione di $\bar{\Phi}$ la seguente diseguaglianza, per ogni $\varepsilon > 0$

$$\|y - z - \alpha[\bar{\Phi}(y) - \bar{\Phi}(z)]\| \leq 2(1 + \alpha + k)\varepsilon + k\|y - z\|.$$

Segue che $\bar{\Phi}$ è *vicino* a I, così otteniamo dal Teorema 3.1 che $\bar{\Phi}$ è un'applicazione bigettiva tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$. Se fissiamo $w \in \mathcal{B}$, noi troviamo un $x \in \mathcal{B}$ tale che $\bar{\Phi}(x) = w$. Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega_1$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi(x_n) = \bar{\Phi}(x)$. Se poniamo $w_n = \Phi(x_n)$ otteniamo che $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega_2$ e $w_n \to w$, così Ω_2 è denso in $\mathcal{B}$. □

Definiamo ora un'applicazione $\Phi : B(\mathcal{X}) \longrightarrow A(\mathcal{X})$ nel modo seguente

$$\text{per ogni} \quad y \in B(\mathcal{X}) \quad \text{poniamo} \quad \Phi(y) = A(x) \quad \text{con} \quad x \in B^{-1}(y). \tag{49}$$

Φ è ben definito da (50) perché non dipende dalla scelta di $x \in B^{-1}(y)$. Infatti per ogni $x_1, x_2 \in B^{-1}(y)$ si ha $B(x_1) = B(x_2)$, così che per il Lemma 5.1 segue che $A(x_1) = A(x_2)$ L'applicazione (49) puo' essere descritta in maniera equivalente come segue $\forall y \in B(\mathcal{X})$

$$\Phi(y) = AB^{-1}(y)\,. \tag{50}$$

Dimostriamo che

Lemma 6.4. *A è vicina a B se e solo se Φ è vicina a I.*

Dimostrazione. Siano $y_1, y_2 \in B(\mathcal{X})$ e $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ tali che $B(x_1) = y_1$, $B(x_2) = y_2$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2 - \alpha[\Phi(y_1) - \Phi(y_2)]\| &= \|B(x_1) - B(x_2) - \alpha[AB^{-1}(y_1) - AB^{-1}(y_2)]\| = \\ &= \|B(x_1) - B(x_2) - \alpha\,[A(x_1) - A(x_2)]\| \leq K\|B(x_1) - B(x_2)\| = K\|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

Allora Φ è *vicino* I. Viceversa, se Φ è *vicino* I, per ogni x_1, $x_2 \in \mathcal{X}$, posto $y_1 = B(x_1)$ e $y_2 = B(x_2)$, otteniamo le seguenti stime:

$$\begin{aligned} &\|B(x_1) - B(x_2) - \alpha[A(x_1) - A(x_2)]\| = \\ &= \|y_1 - y_2 - \alpha[\Phi(y_1) - \Phi(y_2)]\| \leq K\|y_1 - y_2\| = K\|B(x_1) - B(x_2)\|. \end{aligned}$$

Quindi A è *vicino* B. □

Possiamo ora dimostrare il torema che segue.

Teorema 6.1. *Sia A vicino a B.*

1. *Se $B(\mathcal{X})$ è aperto in $\mathcal{B}$ allora $A(\mathcal{X})$ è aperto in $\mathcal{B}$.*
2. *Se $B(\mathcal{X})$ è denso in $\mathcal{B}$ allora $A(\mathcal{X})$ è denso in $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Poniamo, per ogni $y \in B(\mathcal{X})$

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= AB^{-1}(y), \\ \Omega_1 &= B(\mathcal{X}), \\ \Omega_2 &= A(\mathcal{X}). \end{aligned}$$

Osserviamo che $\Omega_2 = \Phi(\Omega_1)$, e che in virtù del Lemma 6.4, Φ è *vicino* a I, perchè A è *vicino* a B per ipotesi. Da cui segue che Φ verifica le ipotesi dei Lemmi 6.2 e 6.3. Otteniamo quindi l'asserto *1* come conseguenza del Lemma 6.2 se Ω_1 è aperto in $\mathcal{B}$, mentre otteniamo l'asserto *2* se Ω_1 è denso in $\mathcal{B}$. Come conseguenza del Lemma 6.3 □

7 Teorema di immagine aperta per gli operatori differenziabili

Lemma 7.1. *Siano X, Y spazi di Banach rispettivamente con norma $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ ed $F : X \to Y$ definita in un intorno $U(x_0) \subset X$ che soddisfano le condizioni:*

1. *F è differenziabile con continuità secondo Fréchet in un intorno di x_0.([10])*
2. *$F'(x_0) : X \to Y$ è bigettiva.*

Allora esiste un intorno $W(x_0)$ tale che $F'(x) : X \to Y$ è bigettiva per ogni $x \in W(x_0)$.

Dimostrazione. Dal Teorema dell'*immagine aperta* di Banach otteniamo che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $v \in X$

$$\|v\|_X \leq \frac{\|F'(x_0)\, v\|_Y}{\delta}. \tag{51}$$

Per la continuità di $F'(x)$ in x_0, segue per ogni $\varepsilon \in (0, \delta)$ esiste $W(x_0) \subset U(x_0)$ tale che $\forall x \in W(x_0)$ e per ogni $v \in X$ abbiamo

$$\|F'(x_0)v \,-\, F'(x)v\|_Y \leq \|F'(x_0) - F'(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\, \|v\|_X \,\leq\, \varepsilon\|v\|_X,$$

da cui per $k = \dfrac{\varepsilon}{\delta}$ segue che, per (51)

$$\|F'(x_0)v \,-\, F'(x)v\|_Y \leq k\|F'(x_0)v\|_Y, \quad \forall v \in X,\ \forall x \in X$$

Quindi per ogni $x \in W(x_0)$, $F'(x)$ è vicino a $F'(x_0)$, con $\alpha = 1$. Essendo, per ipotesi, $F'(x_0)$ una bigezione tra X e Y anche $F'(x)$, con $x \in W(x_0)$, risulta esserlo per il Teorema 5.2. □

Teorema 7.1. *Sia $F : U(x_0) \to Y$ verificante le ipotesi del Lemma 7.1. Supponiamo in particolare che F sia di classe $C^1(U(x_0))$ e che $U(x_0)$ sia convesso. Allora esiste un intorno $V(x_0)$ contenuto in $U(x_0)$ tale che per ogni x_1, $x_2 \in V(x_0)$ si abbia*

$$\|F'(x_0)(x_1 - x_2) \,-\, [F(x_1) - F(x_2)]\|_Y \,\leq\, \|F'(x_0)(x_1 - x_2)\|_Y.$$

Dimostrazione. Per il Lemma 7.1 sappiamo che esiste un intorno convesso di x_0 $W(x_0) \subset U(x_0)$ dove $F'(x)$ è bigettiva, mentre l'applicazione $t \longrightarrow F'[x_2 + t(x_1 - x_2)]$ che va da $[0, 1]$ in $\mathcal{L}(X, Y)$ è continua, passiamo allora a considerare le seguenti relazioni

$$\|F'(x_0)(x_1 - x_2) - [F(x_1) - F(x_2)]\|_Y =$$

$$= \left\| F'(x_0)(x_1 - x_2) - \left\{ \int_0^1 F'[x_2 + t(x_1 - x_2)]\, dt \right\} (x_1 - x_2) \right\|_Y =$$

$$= \left\| F'(x_0)(x_1 - x_2) - \left\{ \int_0^1 F'[x_2 + t(x_1 - x_2)]\, [F'(x_0)]^{-1}\, dt \right\} F'(x_0)\,(x_1 - x_2) \right\|_Y \leq$$

$$\leq \left\| I_Y \,-\, \left\{ \int_0^1 F'[x_2 + t(x_1 - x_2)]\, dt \right\} [F'(x_0)]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \|F'(x_0)\,(x_1 - x_2)\,\|_Y$$

[10] Diremo che F è differenziabile secondo Fréchet in x_0 se esiste un'applicazione lineare $F'(x_0) : X \to Y$ tale che $F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)h + \omega(h), h \in X$. Dove $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|\omega(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Da questa diseguaglianza otteniamo la tesi se determiniamo $k \in (0,1)$ tale che per ogni x_1, x_2 appartenenti ad un opportuno intorno di x_0 si abbia

$$\mathcal{M}(x_1,x_2) = \left\| I_Y - \left\{ \int_0^1 F'[x_2 + t(x_1 - x_2)]\, dt \right\} [F'(x_0)]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \le k \tag{52}$$

Posto $x = [F'(x_0)]^{-1} y$, osserviamo che (52) equivale a

$$\mathcal{M}(x_1,x_2) = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\left\| F'(x_0)x - \left\{ \int_0^1 F'[x_2 + t(x_1 - x_2)]\, dt \right\} \right\|_Y}{\|F'(x_0)x\|_Y} \le k \tag{53}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $V(x_0) \subset W(x_0)$ tale che per tutte le coppie x_1, x_2 appartenenti a $V(x_0)$ si ha

$$\begin{aligned} &\left\| F'(x_0) - \left\{ \int_0^1 F'[x_2 + t(x_1 - x_2)]\, dt \right\} \right\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} = \\ &= \left\| \int_0^1 \{ F'[x_2 + t(x_1 - x_2)] - F'(x_0) \}\, dt \right\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \le \\ &\le \int_0^1 \| F'[x_2 + t(x_1 - x_2)] - F'(x_0) \|_{\mathcal{L}(Y,Y)}\ dt \ \le \varepsilon. \end{aligned} \tag{54}$$

D'altra parte dal *teorema di Banach dell'applicazione aperta* abbiamo che

$$\delta \|x\|_X \le \|F'(x_0)x\|_X$$

Quindi tornando a (52), scelto $\varepsilon \in (0, \delta)$ abbiamo che esiste $V(x_0) \subset W(x_0))$ tale che per ogni x_1, x_2 appartenenti a $V(x_0)$ si abbia

$$\mathcal{M}(x_1,x_2) \le \varepsilon \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|x\|_X}{\|F'(x_0)x\|_Y} \le \frac{\varepsilon}{\delta} < 1.$$

$\square$

8 Sistemi ellittici totalmente non lineari del secondo ordine.

Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ che per semplicità supponiamo *convesso* e di classe C^2. Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^{n^2 N} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ misurabile in x, continuo nelle altre variabili e tale che per q.o. $x \in \Omega$

$$F(x, 0) = 0. \tag{55}$$

Supponiamo che F verifichi la seguente condizione A_x.

Definizione 8.1. *(Condizione A_x per sistemi non lineari)*
Diremo che l'operatore F soddisfa la Condizione A_x *se esistono due costanti reali γ, δ con $\gamma > 0$, $\delta \geq 0$, $\gamma + \delta < 1$, una funzione α misurabile e positiva definita su Ω con $0 < C_1 < \alpha(x) < C_2$, tali che, $\forall x \in \Omega$, $\forall Q, M \in R^{N \times n^2}$:*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} - \alpha(x)\left[F(x, Q+M) - F(x, M)\right] \right\|_N \leq \gamma \|Q\|_{N\times n^2} + \delta \| \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} \|_N . \tag{56}$$

Osserviamo che dalla definizione seguono le seguenti diseguaglianze, per ogni $x \in \Omega$, per ogni $\forall Q, \in R^{N \times n^2}$:([11])

$$\|F(x, Q)\|_N \leq C \, \|Q\|_{N\times n^2}, \tag{57}$$

$$\frac{1-\delta}{C_2} \left\| \sum_{i=1}^{n} (M-Q)_{ii} \right\|_N + \frac{\gamma}{C_2} \|M - Q\|_{N\times n^2} \leq \|F(x, M) - F(x, Q)\|_N . \tag{58}$$

Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u \in H^2 \cap H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N) \\ \\ F(x, D^2(u)) = f(x), \end{cases} \tag{59}$$

Dimostriamo il seguente Teorema

Teorema 8.1. *Nell'ipotesi (55), se F verifica la* Condizione A_x *per ogni $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ esiste una ed una sola soluzione del Problema 59.*

Dimostrazione. Verifichiamo che l'operatore $F(x, D^2u)$ è vicino all'operatore Δ tra gli spazi $H^2 \cap H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \|\Delta[u(x) - v(x)] - \alpha[F(x, D^2u(x)) - F(x, D^2v(x))]\|^2 \, dx \leq \\ &\leq \gamma\,(\gamma + \delta) \int_\Omega \|D^2(u(x) - v(x))\|^2 \, dx + \delta\,(\gamma + \delta) \int_\Omega \|\Delta(u(x) - v(x))\|^2 \, dx \leq \\ &(\text{maggiorazione di Miranda} - \text{Talenti}) \\ &\leq (\gamma + \delta)^2 \int_\Omega \|\Delta(u(x) - v(x))\|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{60}$$

$\square$

[11]La disequazione (56) è equivalente alla seguente

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (M-Q)_{ii} - \alpha(x)\left[F(x, M) - F(x, Q)\right] \right\|_N \leq \gamma \|M - Q\|_{N\times n^2} + \delta \| \sum_{i=1}^{n} (M-Q)_{ii} \|_N$$

Quindi, per il Teorema 3.1, essendo Δ una bigezione tra $H^2 \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tale risulta essere anche $F(x, D^2u)$. Inoltre da (58) segue

$$\int_\Omega \|D^2(u(x) - v(x))\|^2 dx \;\leq\; C \int_\Omega \|F(x, D^2u(x)) \;-\; F(x, D^2v(x)\|^2 \; dx. \tag{61}$$

Corollario 8.1. *Nelle ipotesi del teorema precedente se $g \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ed $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ allora il problema di Dirichlet omogeno ammette una ed una sola soluzione*

$$\begin{cases} u - g \in H^2 \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \\ \\ F(x, D^2u) = f(x), \;\text{ in } \Omega \end{cases} \tag{62}$$

Dimostrazione. Infatti risolvere (62) equivale a risolvere il problema seguente

$$\begin{cases} w \in H^2 \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \\ \\ F(x, D^2w + D^2g) = f(x), \;\text{ in } \Omega \end{cases} \tag{63}$$

Infatti anche l'operatore $Q \longrightarrow F(x, Q + D^2g)$ verifica la *Condizione* A_x con le stesse costanti. □

9 Differenziabilità delle soluzioni di problemi totalmente non lineari

Iniziamo con il considerare un sistema del tipo

$$F(D^2u) \;=\; 0, \quad \text{in } \Omega. \tag{64}$$

Un sistema di questo tipo, ovvero che non dipende in maniera esplicita da x lo chiamiamo sistema base. Supponiamo anche

$$F(0) \;=\; 0 \tag{65}$$

Dimostriamo il seguente teorema di differenziabilità.

Teorema 9.1. *Sia $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ soluzione del sistema (64), con F verificante la* Condizione A_x*, allora $u \in H^3_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e per ogni sfera $S(x_0, 2\sigma) \subset \Omega$ si ha la maggiorazione di Caccioppoli*

$$\int_{S(x_0,\sigma)} \|D^3u\|^2 \; dx \;\leq\; \frac{C}{\sigma^2} \int_{S(x_0,2\sigma)} \|D^2u \;-\; \{D^2u\}_{S(x_0,2\sigma)}\|^2 \; dx. \tag{66}$$

La dimostrazione del teorema richiede l'uso dei seguenti *Lemmi di Niremberg* (per la dimostrazione vedi ad esempio [17]).

Lemma 9.1. *(Nirenberg)*
Sia $u \in L^q(S(\sigma), \mathbb{R}^N))$, $1 < q < +\infty$, *ed esiste* $M > 0$ *tale che*([12])

$$\|\tau_{ih} u\|_{L^q(S(t\sigma),\mathbb{R}^N)} \leq M\,|h|, \quad i = 1, \cdots, n, \;\; |h| < (1-t)\,\sigma, \;\; t \in (0,1)$$

allora $u \in H^{1,q}(S(t\sigma), \mathbb{R}^N)$ *e*

$$\|D_i u\|_{L^q(S(t\sigma),\mathbb{R}^N)} \leq M, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Lemma 9.2. *(Nirenberg)*
Sia $u \in H^{1,q}(S(\sigma), \mathbb{R}^N)$, $q \geq 1$, *allora per* $t \in (0,1)$ *e* $|h| < (1-t)\sigma$ *si ha*

$$\|\tau_{ih} u\|_{L^q(S(t\sigma),\mathbb{R}^N)} \leq \|D_i u\|_{L^q(S(\sigma),\mathbb{R}^N)}\,|h|, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Dimostrazione. (teorema 9.1)
Fissata $S(2\sigma) = S(x_0, 2\sigma) \subset \Omega$, fissiamo i, $1 \leq i \leq n$, $|h| < \dfrac{\sigma}{4}$. Consideriamo una funzione smussante $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con le proprietà

$$0 \leq \theta \leq 1,$$

$$\theta = 1 \;\text{ in }\; S(\sigma)$$

$$\theta = 0 \;\text{ in }\; \mathbb{R}^n \setminus S\left(\frac{3}{2}\,\sigma\right)$$

$$\|D^\alpha \theta\| \leq \frac{C}{\sigma^{|\alpha|}}.$$

Sia $P(x) = (P_1(x), \cdots P_N(x))$ dove $P_1, \cdots P_N$ sono polinomi in x di grado minore o uguale a 2, tali che([13])

$$\int_{S(2\sigma)} D^\alpha [u(x) - P(x)]\,dx = 0, \quad \forall \alpha,\; |\alpha| = 2. \tag{67}$$

Dal sistema (64) otteniamo

$$\tau_{ih} F(D^2 u(x)) = 0 \;\text{ in }\; S\left(\frac{3}{2}\;\sigma\right).$$

ed anche

$$F(D^2(\tau_{ih} u) + D^2 u) = 0 \;\text{ in }\; S\left(\frac{3}{2}\;\sigma\right). \tag{68}$$

Dato che $D^2(P)$ è una matrice costante, risulta $\tau_{ih} D^2 P = 0$ e quindi da (68) si ha anche

$$F(D^2[\tau_{ih}(u - P)] + D^2 u) = 0 \;\text{ in }\; S\left(\frac{3}{2}\;\sigma\right). \tag{69}$$

Utilizziamo ora il seguente Lemma che è una semplice conseguenza della *Condizione* A_x

[12] $\tau_{s,h} u(x) = u(x + h e_s) - u(x)$, $h \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.
[13] $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{N}, |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \;\cdots\; D_n^{\alpha_n}$.

Lemma 9.3. *Siano* $Q, M \in \mathbb{R}^{n^2N}$ *tali che*

$$F(Q+M) = F(M), \tag{70}$$

allora

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} Q_{ii} \right\|_N \leq \frac{\gamma}{1-\delta} \, \|Q\|_{n^2N}. \tag{71}$$

Applichiamo quindi questo Lemma con $M = D^2u$ e $Q = D^2\tau_{ih}\,(u-P)$ otteniamo

$$\|\theta\, \Delta(\tau_{ih}(u-P))\|_N \leq \frac{\gamma}{1-\delta} \|\theta D^2 \tau_{ih}(u-P)\|_{n^2N}, \quad \text{in } S\left(\frac{3}{2}\,\sigma\right). \tag{72}$$

Poniamo $\mathcal{U} = \theta\, \tau_{ih}(u-P)$, ovviamente $\mathcal{U} \in H^2 \cap H_0^1\left(S\left(\frac{3}{2}\,\sigma\right), \mathbb{R}^N\right)$, e si ha

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{U} &= \theta\Delta\tau_{ih}(u-P) + \Phi(u-P) \\ D^2\mathcal{U} &= \theta D^2\tau_{ih}(u-P) + \Psi(u-P). \end{aligned}$$

Dove

$$\Phi(u-P) \;=\; (\Delta\theta)\, \tau_{ih}(u-P) \;+\; 2\sum_{s=1}^{n} D_s\theta\, D_s\tau_{ih}(u-P) \tag{73}$$

$$\Psi(u-P) \;= D^2\theta\, \tau_{ih}(u-P) \;+\; \{D_r\theta\, D_s\tau_{ih}(u-P)\}_{r,s=1,\cdots n}. \tag{74}$$

$$\tag{75}$$

Dalle identità sopra applicate alla (72) otteniamo

$$\|\Delta\mathcal{U}\|_N \;\leq\; \frac{\gamma}{1-\delta} \|D^2\mathcal{U}\|_{n^2N} \;+\; c(\gamma,\, \delta)\; (\|\Phi(u-P)\|_N + \|\Psi(u-P)\|_{n^2N}). \tag{76}$$

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$

$$\|\Delta\mathcal{U}\|_N^2 \;\leq\; (1+\varepsilon)\left(\frac{\gamma}{1-\delta}\right)^2 \|D^2\mathcal{U}\|_{n^2N}^2 \;+\; c(\varepsilon, \gamma,\, \delta)\; \left(\|\Phi(u-P)\|_N^2 + \|\Psi(u-P)\|_{n^2N}^2\right). \tag{77}$$

Integro su $S\left(\frac{3}{2}\,\sigma\right)$ ed applico la *maggiorazione di Miranda-Talenti* ottenendo

$$\int_{S\left(\frac{3}{2}\sigma\right)} \|D^2\mathcal{U}\|_N^2\, dx \;\leq\; (1+\varepsilon)\left(\frac{\gamma}{1-\delta}\right)^2 \int_{S\left(\frac{3}{2}\,\sigma\right)} \|D^2\mathcal{U}\|_{n^2N}^2\, dx \;+ \tag{78}$$

$$+c(\varepsilon, \gamma,\, \delta) \int_{S\left(\frac{3}{2}\,\sigma\right)} \left(\|\Phi(u-P)\|_N^2 + \|\Psi(u-P)\|_{n^2N}^2\right) dx. \tag{79}$$

Essendo $\dfrac{\gamma}{1-\delta} < 1$, possiamo scegliere ε sufficientemente piccolo in modo tale che

$$\int_{S(\sigma)} \|D^2\, \tau_{ih}\, (u-P)\|^2_{n^2N}\, dx \le \int_{S\left(\frac{3}{2}\sigma\right)} \|D^2\mathcal{U}\|^2_{n^2N}\, dx \ \le \tag{80}$$

$$\le\ c(\varepsilon, \gamma,\, \delta) \int_{S\left(\frac{3}{2}\sigma\right)} \left(\|\Phi(u-P)\|^2_N + \|\Psi(u-P)\|^2_{n^2N}\right) dx. \tag{81}$$

Maggioriamo il secondo membro di questa diseguaglianza con i *lemmi di Poincaré* e di *Niremberg*:

$$\begin{aligned}
&\int_{S\left(\frac{3}{2}\sigma\right)} \|\Phi(u-P)\|^2_N dx \ \le \frac{C}{\sigma^4} \int_{S\left(\frac{3}{2}\sigma\right)} \|\tau_{ih}(u-P)\|^2_N \ dx + \\
&+ \frac{C}{\sigma^2} \int_{S\left(\frac{3}{2}\sigma\right)} \|D\tau_{ih}(u-P)\|^2_{n^2}\, dx \ \le \\
&\le C\, \frac{h^2}{\sigma^4} \int_{S(2\,\sigma)} \|D_i(u-P)\|^2_N \ dx \ +\ C\, \frac{h^2}{\sigma^2} \int_{S(2\,\sigma)} \|D^2(u-P)\|^2_{n^2N}\, dx \ \le \\
&\le\ C\, \frac{h^2}{\sigma^2} \int_{S(2\,\sigma)} \|D^2(u-P)\|^2_{n^2N}\, dx
\end{aligned} \tag{82}$$

Analogamente si dimostra che

$$\int_{S\left(\frac{3}{2}\sigma\right)} \|\Psi(u-P)\|^2_{n^2N} dx \ \le\ C\, \frac{h^2}{\sigma^2} \int_{S(2\,\sigma)} \|D^2(u-P)\|^2_{n^2N}\, dx\,. \tag{83}$$

Dal *Lemma di Niremberg* 9.1 segue la tesi. $\square$

Nel precedente Teorema abbiamo provato che le soluzioni u del sistema considerato appartengono a $H^3_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e per ogni sfera $S(x_0, 2\sigma) \subset \Omega$ si ha la maggiorazione di Caccioppoli

$$\int_{S(x_0,\sigma)} \|D^3u\|^2 \ dx \ \le\ \frac{C}{\sigma^2} \ \int_{S(x_0,2\sigma)} \|D^2u \ - \ \{D^2u\}_{S(x_0,2\sigma)}\|^2 \ dx. \tag{84}$$

Il secondo membro di questa può essere maggiorato mediante la *diseguaglianza di tipo Poincarè* seguente (vedi ad esempio [17])

$$\|u - u_\Omega\|_{0,p^*,\Omega} \ \le\ C\, |Du|_{1,p,\Omega}, \quad 1 \le p < n,$$

dove $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$, applicata a $p^* = 2$ e quindi $p = \dfrac{2n}{n+2}$, otteniamo

$$\fint_{S(x_0,\sigma)} \|D^2(Du)\|^2 \, dx \le C \left(\fint_{S(x_0,2\sigma)} \|D^2(Du)\|^{\frac{2n}{n+2}} \right)^{\frac{n+2}{n}} \tag{85}$$

Possiamo ora applicare il seguente *Lemma di Gehring-Giaquinta-Modica* (vedi [32],[33])

Lemma 9.4. *Se $\mathcal{U} \in L^r(\Omega)$, $r > 1$, è una funzione non negativa e per ogni $S(x_0, 2\sigma) \subset \Omega$*

$$\left(\fint_{S(x_0,\sigma)} \mathcal{U}^r(x) \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \le C \fint_{S(x_0,2\sigma)} \mathcal{U}(x) \, dx, \tag{86}$$

allora esiste $s > r$ tale che $\mathcal{U} \in L^s_{loc}(\Omega)$ e

$$\left(\fint_{S(x_0,\sigma)} \mathcal{U}^s(x) \, dx \right)^{\frac{1}{s}} \le K \left(\fint_{S(x_0,2\sigma)} \mathcal{U}^r(x) \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \tag{87}$$

Utilizziamo questo Lemma e la maggiorazione (85) prendendo $\mathcal{U} = \|D^2(Du)\|^{\frac{2n}{n+2}}$ e $r = \dfrac{n+2}{n}$. Otteniamo in tal modo che esiste $s > r$ ovvero $s > \frac{n+2}{n}$ per cui

$$\left(\fint_{S(x_0,\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^{\frac{2n}{n+2}s} \, dx \right)^{\frac{1}{s}} \le K \left(\fint_{S(x_0,2\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^2 \, dx \right)^{\frac{n}{n+2}},$$

in particolare $q = \dfrac{2n}{n+2}s > 2$. Abbiamo così dimostrato il teorema:

Teorema 9.2. *Sia $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ una soluzione del sistema base $F(D^2u(x)) = 0$, con F che verifica la* Condizione A *e $F(0) = 0$, allora esiste $q > 2$ tale che $u \in H^{3,q}_{loc}(\Omega)$ per ogni $S(x_0, 2\sigma) \subset \Omega$ ed inoltre*

$$\left(\fint_{S(x_0,\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \le K \left(\fint_{S(x_0,2\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{88}$$

Dai *teoremi di immersione di Sobolev:*

- Se $1 \le p < \dfrac{m}{n}$ allora $H^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, con $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,
- $\dfrac{m}{n} < p$ allora $H^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \subset C^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$,
- $n < p$ allora $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \subset C^{0,\gamma}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, con $\gamma = 1 - \dfrac{n}{p}$,

otteniamo che

- se $n < p$ allora $D^2u \in C^{0,\gamma}(\Omega, \mathbb{R}^{n^2N})$, con $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$
- se $n < 2p$ allora $Du \in C^{0,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^{nN})$,
- se $n < 3p$ allora $u \in C^{0,\beta}(\Omega, \mathbb{R}^{N})$.

10 Maggiorazioni fondamentali per le derivate seconde nei sistemi base omogenei

Teorema 10.1. *Sia $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ una soluzione del sistema base $F(D^2u(x)) = 0$, con F che verifica la* Condizione A *e $F(0) = 0$, allora esiste $q > 2$ tale che per ogni $S(\sigma) = S(x_0, \sigma) \subset \Omega$ e per ogni $t \in (0,1)$*

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^2 \, dx \;\leq\; C\, t^{n(1-\frac{2}{q})} \int_{S(\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^2 \, dx. \tag{89}$$

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni $S(\sigma) \subset \Omega$ e per ogni $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ si ha per la *maggiorazione di Hölder* e per ogni $q > 2$

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^2 \, dx \;\leq\; C\, t^{n(1-\frac{2}{q})}\, \sigma^n \left(\fint_{S(\frac{\sigma}{2})} \|D^2[Du(x)]\|^q \, dx \right)^{\frac{2}{q}},$$

da cui per il teorema 9.2 esiste $q > 2$ tale che

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^2 \, dx \;\leq\; C\, t^{n(1-\frac{2}{q})} \int_{S(\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^2 \, dx.$$

Se invece $\frac{1}{2} \leq t < 1$, allora la maggiorazione è banalmente vera:

$$\begin{aligned}\int_{S(t\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^2 \, dx \;&\leq\; t^{n(1-\frac{2}{q})} \frac{1}{t^{n(1-\frac{2}{q})}} \int_{S(\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^2 \, dx \leq \\ &\leq C_2\, t^{n(1-\frac{2}{q})} \int_{S(\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^2 \, dx.\end{aligned}$$

□

Teorema 10.2. *Sia $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ una soluzione del sistema base $F(D^2u(x)) = 0$, con F che verifica la* Condizione A *e $F(0) = 0$, allora esiste un valore $q > 2$ tale che per ogni $S(\sigma) = S(x_0, \sigma) \subset \Omega$ e per ogni $t \in (0,1)$ si ha*

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2u(x) - \{D^2u\}_{S(t\sigma)}\|^2 \, dx \;\leq\; C\, t^{2+n(1-\frac{2}{q})} \int_{S(\sigma)} \|D^2u(x) - \{D^2u\}_{S(\sigma)}\|^2 \, dx, \tag{90}$$

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2u(x)\|^2 \, dx \;\le\; C\, t^{\lambda} \int_{S(\sigma)} \|D^2u(x)\|^2 \, dx, \tag{91}$$

dove

$$\lambda \;=\; \begin{cases} n & \text{se} \quad n < q \\ \\ 2 + n\left(1 - \dfrac{2}{q}\right) & \text{se} \quad n > q. \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia $0 < t < \dfrac{1}{2}$. Per il *teorema di Poincaré*

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2u(x) \,-\, \{D^2u\}_{S(t\sigma)}\|^2 \; dx \le C\, t^2\, \sigma^2 \int_{S(t\sigma)} \|D^2[Du(x)]\|^2 \; dx \;\le$$

(per il teorema precedente)

$$\le C\, t^{2+n(1-\frac{2}{q})}\; \sigma^2 \int_{S(\frac{\sigma}{2})} \|D^2[Du(x)]\|^2 \; dx \;\le \tag{92}$$

$$\le C\, t^{2+n(1-\frac{2}{q})} \int_{S(\sigma)} \|D^2u(x) \,-\, \{D^2u\}_{S(\sigma)}\|^2 \; dx.$$

L'ultimo passaggio è conseguenza del teorema 9.1.
Nel caso in cui $\dfrac{1}{2} \le t < 1$ la maggiorazione è banalmente vera.

Più complicata è la dimostrazione di (91). Distinguiamo i casi $n < q$ e $n > q$.
Se $n < q$, come conseguenza del Teorema 9.2 abbiamo visto che

$$D^2u \in C^{0,1-\frac{n}{q}}(\Omega, \mathbb{R}^{n^2N})$$

quindi dal Teorema 9.1,dalla maggiorazione della D^3u e dal *teorema di Sobolev* ([14]) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sup_{S(\frac{\sigma}{2})} \|D^2u\|^2 \;&\le\; \frac{\sigma^{q-n}}{2^{q-n}} \left(\int_{S(\frac{\sigma}{2})} \|D^2Du(x)\|^q \, dx\right)^{\frac{2}{q}} \;\le \\ &\le C\, \sigma^q \;-\!\!\!\!\!\!\int_{S(\frac{3\sigma}{2})} \|D^2Du(x)\|^2 \, dx \;\le\; C\, \sigma^{q-2} \int_{S(\sigma)} \|D^2u(x) \,-\, \{D^2u\}_{S(\sigma)}\|^2 \, dx. \end{aligned} \tag{93}$$

Quindi se $0 < t < \dfrac{1}{2}$

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2u(x)\|^2 \; dx \;\le\; C\, t^n\, \sigma^n \sup_{S(t\sigma)} \|D^2u\|^2 \;\le C\, t^n \int_{S(\sigma)} \|D^2u(x)\|^2 \, dx \tag{94}$$

[14]Ricordiamo che se $n < q$ allora $H^{1,q}(\Omega) \subset C^0(\Omega)$.

Nel caso $\dfrac{1}{2} \le t < 1$ la maggiorazione è banalmente vera.

Se invece $n > q$ allora per $0 < t < \rho < 1$ si ha

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2u(x)\|^2 \, dx \, = \, 2 \int_{S(t\sigma)} \|D^2u(x) \, - \, \{D^2u\}_{S(\rho\sigma)}\|^2 \, dx \, + \, 2 \int_{S(t\sigma)} \|\{D^2u\}_{S(\sigma\rho)}\|^2 \, dx \, \le$$

(Per la maggiorazione (90))

$$\le 2 \int_{S(\rho\sigma)} \|D^2u(x) \, - \, \{D^2u\}_{S(\rho\sigma)}\|^2 \, dx \, + 2 \, t^n \, \sigma^n \left(\fint_{S(\rho\sigma)} \|D^2u(x)\| \, dx \right)^2 \le \tag{95}$$

$$\le C \, \rho^{\, 2+n \left(1-\frac{2}{q}\right)} \int_{S(\sigma)} \|D^2u(x) \, - \, \{D^2u\}_{S(\sigma)}\|^2 \, dx \, + \, 2 \, \frac{t^n}{\rho^n} \int_{S(\rho\sigma)} \|D^2u(x)\|^2 \, dx \, \le$$

$$\le \, 2 \left(\frac{t}{\rho}\right)^n \int_{S(\rho\,\sigma)} \|D^2u(x)\|^2 \, dx \, + \, C \, \rho^{2+n \left(1-\frac{2}{q}\right)} \int_{S(\sigma)} \|D^2u(x)\|^2 \, dx.$$

A quest'ultima maggiorazione applichiamo il seguente *Lemma algebrico* (vedi [17])

Lemma 10.1. *Sia φ una funzione non negativa e non decrescente su $(0, d]$ siano $\alpha > 0$, $K \in (0, 1)$ e $A \ge 1$. Supponiamo che per ogni $t \in (0, 1)$ e per ogni $\sigma \in (0, d]$ risulti*

$$\varphi(t\sigma) \, \le \, \{A(1 + K)t^\alpha + K\} \, \varphi(\sigma) \tag{96}$$

allora per ogni $t \in (0, 1)$ e per ogni $\sigma \in (0, d]$

$$\varphi(t\sigma) \, \le \, C(K, A) \; t^{\alpha \, \varepsilon(K,A)} \, \varphi(\sigma), \tag{97}$$

dove

$$\varepsilon(K, A) \, = \sup_{0<t<\frac{1-K}{1+K}} \frac{\log[(1 + K)t + K]}{\log t \, - \, \log \, A}, \quad C(K, A) \, = \, \frac{1 - \varepsilon}{K}.$$

Si osserva che ε come funzione di K è decrescente in $(0, 1)$ e come funzione di A è decrescente in $[1, +\infty)$. Inoltre $\varepsilon(K, A) \to 1$ per $K \to 0^+$, mentre $C(K, A) \to +\infty$. Poniamo quindi

$$\varphi(t\sigma) \, = \int_{S(t\sigma)} \|D^2u(x)\|^2 \, dx,$$

la maggiorazione sopra diventa

$$\varphi(t\sigma) < \left[t^n \, \frac{2}{\rho^n} \, + \, C \, \rho^{2+\,n\left(1-\frac{2}{q}\right)} \right] \, \varphi(\sigma).$$

Poniamo dunque

$$K(\rho) \,=\, C\,\rho^{2+n\left(1-\frac{2}{q}\right)}$$

$$A(\rho) \,=\, \frac{2}{C\,\rho^{n+2+n\left(1-\frac{2}{q}\right)}},$$

Ottenendo di conseguenza

$$\varphi(t\sigma) \,\leq\, \{A(\rho)\,\left[1+K(\rho)\right] t^n + K(\rho)\}\,\,\varphi(\sigma).$$

Osserviamo che $0 < K(\rho) < 1$ per $\rho < \left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{1}{2+n\left(1-\frac{2}{q}\right)}}$. Applicando il Lemma 10.1 risulta

$$\varphi(t\sigma) \,\leq\, C(K,A)\, t^{n\,\varepsilon}\,\,\varphi(\sigma)$$

da cui la tesi

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2u(x)\|^2\,dx \,\leq\, C(\rho)\,\,t^{n\varepsilon(\rho)} \int_{S(\sigma)} \|D^2u(x)\|^2\,dx.$$

□

11 Maggiorazioni fondamentali delle derivate prime nei sistemi base omogenei

Teorema 11.1. *Nelle ipotesi del Teorema 10.2 esiste $q > 2$ tale che per ogni palla $S(\sigma) = S(x_0,\sigma) \subset \Omega$ e per ogni $t \in (0,1)$ si ha che*

$$\int_{S(t\sigma)} \|Du(x) \,-\, \{Du\}_{S(t\sigma)}\|^2\,dx \,\,\leq\,\, C\,t^{\lambda+2} \int_{S(\sigma)} \|Du(x) \,-\, \{Du\}_{S(\sigma)}\|^2\,dx, \tag{98}$$

con $\lambda = n\,\varepsilon$, per ogni $\varepsilon \in (0,1)$, se $n > q$, $\lambda = n$ se $n < q$, inoltre

$$\int_{S(t\sigma)} \|Du(x)\|^2\,dx \,\,\leq\,\, C\,t^{\lambda_1} \int_{S(\sigma)} \|Du(x)\|^2\,dx, \tag{99}$$

dove $\lambda_1 = \min\{\lambda+2, n\}$.

Alla dimostrazione premettiamo il seguente Lemma.

Lemma 11.1. *(Maggiorazione di Caccioppoli)*
Nelle ipotesi del Teorema 10.2, per ogni $S(2\sigma) \subset \Omega$ si ha:

$$\int_{S(\sigma)} \|D^2u(x)\|^2\,dx \,\leq\, C\,\frac{1}{\sigma^2} \int_{S(2\sigma)} \|Du(x) \,-\, \{Du\}_{S(2\sigma)}\|^2\,dx. \tag{100}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione smussante $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ così definita: $0 \le \theta \le 1$, $\theta = 1$ su $S(\sigma)$, $\theta = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus S(2\sigma)$, $|D^\alpha \theta| \le C\,\sigma^{-|\alpha|}$ per ogni multi indice α. Sia poi $P = (P^1, \cdots, P^N)$ il vettore costituito da N polinomi di grado minore o uguale ad uno, tale che per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$, con $|\alpha| \le 1$, si ha

$$\int_{S(2\sigma)} D^\alpha(u(x) \, - \, P(x)) \, dx \, = \, 0.$$

Utilizzeremo il seguente Lemma riportato in [17]([15])

Lemma 11.2. *Sia $u \in H^{m,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $P = (P_1, \cdots, P_N)$ un vettore costituito da N polinomi di grado minore o uguale ad $m-1$ tale che per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$, con $|\alpha| \le 1$, si ha*

$$\int_{\Omega} D^\alpha(u(x) \, - \, P(x)) \, dx \, = \, 0,$$

allora

$$\|u \, - \, P\|_{0,p,\Omega} \, \le \, C_1 \, d_\Omega^m \, |u|_{m,p,\Omega} \quad 1 \le p < +\infty.$$

$$\|u \, - \, P\|_{0,p^*,\Omega} \, \le \, C_2 \, |u|_{m,p,\Omega}, \;\; 1 < p < \frac{n}{m}$$

dove $\dfrac{1}{p^*} \, = \, \dfrac{1}{p} \, - \, \dfrac{m}{n}$ e $C_1,\; C_2$ sono stabili per omotetia.

medskip

Poniamo quindi $\mathcal{U} \, = \, \theta\,(u - P)$ di conseguenza $\mathcal{U} \in H_0^2(S(2\sigma), \mathbb{R}^N)$, $H(u - P) \, = \, H(u)$, $H(\mathcal{U}) \, = \, H(u)$ in $S(\sigma)$.

Se α, γ, δ sono le costanti positive che intervengono nella *Condizione A*, allora tenuto conto che $F(D^2 u) = 0$ in Ω si ha

$$\|\theta \Delta u\| \, \le \, \theta \, (\gamma \, \|D^2 u\| \, + \, \delta \, \|\Delta u\|) \tag{101}$$

Osserviamo anche che

$$\theta \Delta u \, = \, \Delta \mathcal{U} \, + \, \mathcal{A}(u - P)$$

$$\theta D^2 u \, = \, D^2 \mathcal{U} \, + \, \mathcal{B}(u - P)$$

dove

$$\mathcal{A}(u - P) \, = \, \Delta\theta \, \cdot \, (u - P) \, + \, 2 \sum_{i=1}^{n} \, D_i\theta \, \cdot \, D_i(u - P)$$

$$\mathcal{B}(u - P) \, = \, \{ \, D_{ij}\theta \, \cdot \, (u - P) \, + \, 2 \; D_i\theta \, \cdot \; D_j(u - P)\}_{i,j=1,\cdots,n} \, .$$

Tenuto conto di queste osservazioni da (101) si ottiene

$$\|\theta \, \Delta \, u\| \, \le \, \frac{\gamma}{1 - \delta} \, \|\theta D^2 u\| \tag{102}$$

[15]Si dimostra per induzione tenendo presente che il primo passo è la classica *diseguaglianza di Poincaré.*

$$\|\Delta\mathcal{U}\|^2 \le \left[\frac{\gamma}{1-\delta}\,\|\theta D^2 u\| + \|\mathcal{A}(u-P)\|\right]^2 \le$$

$$\le \left[\frac{\gamma}{1-\delta}\,\|D^2\mathcal{U}\| + \|\mathcal{B}(u-P)\| + \|\mathcal{A}(u-P)\|\right]^2 \le \tag{103}$$

$$\le (1+\varepsilon)\,\frac{\gamma^2}{(1-\delta)^2}\,\|D^2\mathcal{U}\|^2 + C(\varepsilon)\,\|\mathcal{B}(u-P)\|^2 + C(\varepsilon)\|\mathcal{A}(u-P)\|^2$$

Integriamo su $S(2\sigma)$ e teniamo conto della maggiorazione di *Miranda-Talenti*:

$$\int_{S(2\sigma)} \|\Delta\mathcal{U}\|^2\,dx \le C(\varepsilon,\gamma,\delta)\int_{S(2\sigma)} \left\{\|\mathcal{A}(u-P)\|^2 - \|\mathcal{B}(u-P)\|^2\right\}\,dx \tag{104}$$

Il secondo membro viene stimato mediante il Lemma 11.2 e quindi

$$\int_{S(2\sigma)} \left(\|\mathcal{A}(u-P)\|^2 + \|\mathcal{B}(u-P)\|^2\right)\,dx \le C\,\frac{1}{\sigma^2}\int_{S(2\sigma)} \|Du(x) - \{Du\}_{S(2\sigma)}\|^2\,dx \tag{105}$$

Da cui la tesi del Lemma 11.1. □

Dimostro ora la maggiorazione (98) del Teorema 11.1. Per la diseguaglianza di *Poincaré* si ha

$$\int_{S(t\sigma)} \|Du(x) - \{Du\}_{S(t\sigma)}\|^2\,dx \le C\,t^2\,\sigma^2\int_{S(t\sigma)} \|D^2u(x)\|^2\,dx \tag{106}$$

Da cui per ogni $t \in \left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, per (91) del Teorema 10.2

$$\int_{S(t\sigma)} \|Du(x) - \{Du\}_{S(t\sigma)}\|^2\,dx \le C\,t^{2+\lambda}\,\sigma^2\int_{S(\frac{\sigma}{2})} \|D^2u(x)\|^2\,dx \le$$
$$\le C\,t^{2+\lambda}\int_{S(\sigma)} \|Du(x) - \{Du\}_{S(\sigma)}\|^2\,dx,$$

dove $\lambda = n\varepsilon$, $\forall\varepsilon \in (0,1)$ se $n > q$, $\lambda = n$ se $n < q$.

Osservazione 11.1. *Come conseguenza dei Teoremi 10.2 ed 11.1 otteniamo che D^2u è hölderiana in Ω se $n < q$, mentre Du è hölderiana per ogni $n \ge 2$.*

12 Maggiorazioni fondamentali nei sistemi base non omogenei

Teorema 12.1. *Sia $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ soluzione del sistema*

$$F(D^2u(x)) \,=\, f(x) \ \text{ in } \Omega, \tag{107}$$

dove F verifica la Condizione A *e $F(0) = 0$. Sia poi $n < q$, dove q è l'esponente di sommabilità fornitoci dal Teorema 11.1. Se $f \in \mathcal{L}^{2,\mu}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ con $n \le \mu < 2 + n\left(1 - \dfrac{2}{q}\right)$ allora $D^2u \in \mathcal{L}^{2,\mu}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, ovvero D^2u è holderiana dello stesso ordine di f.*

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni vettore η costante di $\mathbb{R}^N$, u è soluzione in Ω del sistema

$$F(D^2u(x)) \,-\, \eta \,=\, f(x) \,-\, \eta,$$

ed il vettore $\xi \longrightarrow F(\xi) - \eta$ verifica ancora la *Condizione A.* Fissata $S(\sigma) \,=\, S(x_0, \sigma) \subset \Omega$, poniamo $u = v - w$ dove w è la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} w \in H^2 \cap H^1_0(S(\sigma), \mathbb{R}^N) \\[2ex] F(D^2w(x) + D^2u(x)) \,-\, \eta = \,0 \quad \text{ in } \ S(\sigma). \end{cases} \tag{108}$$

mentre $v \in H^2(S(\sigma), \mathbb{R}^N)$ è soluzione del sistema

$$F(D^2v(x)) \,-\, \eta \,=\, 0 \quad \text{in } \ S(\sigma) \tag{109}$$

Per v vale la maggiorazione del teorema 10.2, ovvero per ogni $t \in (0, 1)$

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2v(x) \,-\, \{D^2v\}_{S(t\sigma)}\|^2 \; dx \ \le \ C \ t^{2+n\left(1-\frac{2}{q}\right)} \int_{S(\sigma)} \|D^2v(x) \,-\, \{D^2v\}_{S(\sigma)}\|^2 \; dx. \tag{110}$$

Per w dal sistema (108) e dal fatto che u è soluzione del sistema (107) , segue

$$F(D^2w(x) \,+\, D^2u(x)) \,-\, F(D^2u(x)) \,=\, \eta \,-\, f(x)$$

e quindi

$$\|\Delta w(x)\| \,\le\, \|\Delta w(x) \,-\, \alpha \left[F(D^2w(x) \,+\, D^2u(x)) \,-\, F(D^2u(x))\right]\| \,+\, \alpha\|f(x) \,-\, \eta\|,$$

onde

$$\|\Delta w(x)\| \,\le\, \frac{\gamma}{1-\delta}\,\|D^2w(x)\| \,+\, C(\alpha, \gamma, \delta)\,\|f(x) \,-\, \eta\|$$

da cui per ogni $\varepsilon > 0$ vale la maggiorazione

$$\|\Delta w(x)\|^2 \,\le\, (1+\varepsilon)\left(\frac{\gamma}{1-\delta}\right)^2 \|D^2w(x)\|^2 \,+\, C(\varepsilon, \alpha, \gamma, \delta)\,\|f(x) \,-\, \eta\|^2.$$

Integrando su $S(x_0,\sigma)$ ed utilizzando il *teorema di Miranda-Talenti* si ha:

$$\int_{S(\sigma)} \|D^2 w(x)\|^2\, dx \,\le\, (1+\varepsilon)\left(\frac{\gamma}{1-\delta}\right)^2 \int_{S(\sigma)} \|D^2 w(x)\|^2\, dx \,+$$
$$+\, C(\varepsilon,\alpha,\gamma,\delta) \int_{S(\sigma)} \|f(x)\,-\,\eta\|^2\, dx,$$

da cui essendo $\dfrac{\gamma}{1-\delta} < 1$, per ε piccolo

$$\int_{S(\sigma)} \|D^2 w(x)\|^2\, dx \,\le\, C(\varepsilon,\alpha,\gamma,\delta) \int_{S(\sigma)} \|f(x)-\eta\|^2\, dx.$$

Preso $\eta = \{f\}_{S(\sigma)}$, e tenuto conto che $u = v - w$ in $S(\sigma)$ segue per ogni $t \in (0,1)$

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2 u(x)\,-\,\{D^2 u\}_{S(t\sigma)}\|^2\, dx \,\le\, C \int_{S(t\sigma)} \|D^2 v(x)\,-\,\{D^2 v\}_{S(t\sigma)}\|^2\, dx \,+$$

$$+\, C \int_{S(t\sigma)} \|D^2 w(x)\,-\,\{D^2 w\}_{S(t\sigma)}\|^2\, dx \,\le$$

$$\le\, C\, t^{2+n\left(1-\frac{2}{q}\right)} \int_{S(\sigma)} \|D^2 v(x)\,-\,\{D^2 v\}_{S(\sigma)}\|^2\, dx \,+\, C\,\sigma^{\mu}\, [f]^2_{\mathcal{L}^{2,\mu}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \,\le$$

$$\le\, C\, t^{2+n\left(1-\frac{2}{q}\right)} \int_{S(\sigma)} \|D^2 u(x)\,-\,\{D^2 u\}_{S(\sigma)}\|^2\, dx \,+$$

$$+\, C\, t^{2+n\left(1-\frac{2}{q}\right)} \int_{S(\sigma)} \|D^2 w(x)\,-\,\{D^2 w\}_{S(\sigma)}\|^2\, dx \,+\, C\,\sigma^{\mu}\, [f]^2_{\mathcal{L}^{2,\mu}(\Omega,\mathbb{R}^N)} \,\le$$

$$\le\, C\, t^{2+n\left(1-\frac{2}{q}\right)} \int_{S(\sigma)} \|D^2 u(x)\,-\,\{D^2 u\}_{S(\sigma)}\|^2\, dx \,+\, C\,\sigma^{\mu}\, [f]_{\mathcal{L}^{2,\mu}(\Omega,\mathbb{R}^N)}.$$

□

Dal Lemma seguente otteniamo la tesi (vedi [17], lemma 1.I, pag 7).

Lemma 12.1. *Siano φ e Φ funzioni non negative definite su $(0,d]$, Φ non decrescente, e siano A, α, β costanti positive con $\beta < \alpha$. Supponiamo che $\forall t \in (0,1)$ e $\forall \sigma \in (0,d]$*

$$\varphi(t\sigma) \,\le\, A\, t^{\alpha}\, \varphi(\sigma) \,+\, \sigma^{\beta}\, \Phi(\sigma)$$

allora $\forall \varepsilon \in (0,\alpha-\beta]$, $\forall t \in (0,1)$, $\forall \sigma \in (0,d]$

$$\varphi(t\sigma) \,\le\, A\, t^{\alpha-\varepsilon}\, \varphi(\sigma) \,+\, K(A)\, (t\sigma)^{\beta}\, \Phi(\sigma)$$

dove

$$K(\xi) \,=\, \frac{(1+\xi)^{\frac{2\alpha}{\varepsilon}}}{(1+\xi)^{\frac{\alpha-\beta}{\varepsilon}} - \xi}.$$

poniamo dunque

$$\varphi(t\sigma) \;=\; \int_{S(t\sigma)} \|D^2u(x) \;-\; \{D^2u\}_{S(t\sigma)}\|^2 \; dx$$

$$\Phi(\sigma) \;=\; C\,[f]_{\mathcal{L}^{2,\mu}(\Omega,\mathbb{R}^N)}$$

$$\alpha = 2 + n\left(1 - \frac{2}{q}\right),$$

$$\beta = \mu, \quad \varepsilon = \alpha \;-\; \beta.$$

Applicando il lemma sopra otteniamo la tesi per ogni σ con $\sigma < d(x_0, \partial\Omega)$

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2u(x) \;-\; \{D^2u\}_{S(t\sigma)}\|^2 \; dx \;\leq C\,\sigma^{\mu} \left\{\|D^2u\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^{n^2N})} \;+\; [f]^2_{\mathcal{L}^{2,\mu}(\Omega,\mathbb{R}^N)}\right\}.$$

13 Regolarità delle soluzioni dei sistemi quasi base

Supponiamo ora che $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ verifichi il sistema

$$F(x, D^2u(x)) \;=\; f(x) \quad \text{in } \Omega \tag{111}$$

Dove F verifica la *Condizione* A_x ed è tale che

$$F(x, 0) \;=\; 0. \tag{112}$$

Inoltre valgono le ipotesi

$$x \longrightarrow F(x,\xi) \quad \text{é continua in } \Omega, \tag{113}$$

esiste $\omega(\sigma)$, infinitesima per $\sigma \longrightarrow 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{n^2N}$ si ha

$$\|F(x,\xi) \;-\; F(y,\xi)\| \;\leq\; \omega(\|x-y\|)\;\|\xi\|. \tag{114}$$

Dimostriamo il seguente teorema

Teorema 13.1. *Se $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ è soluzione del sistema quasi base (111), con le ipotesi sopra su di F e se $f \in L^{2,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, con $\lambda < n$, allora*

$$D^2u \in L^{2,\lambda-\varepsilon}(\Omega, \mathbb{R}^{n^2N}).$$

In particolare Du è hölderiana se $\lambda > n-2$ e u è hölderiana se $\lambda > n-4$.([16])

[16]Se $Du \in L^{2,\lambda}$ allora $u \in \mathcal{L}^{2,\lambda+2}$ ovvero $u \in C^{\frac{\lambda+2-n}{2}}$.

Dimostrazione. Sia $S(\sigma) = S(x_0, \sigma) \subset \Omega$ e poniamo $u = v - w$, dove $w \in H^2 \cap H_0^1(S(\sigma), \mathbb{R}^N)$ è la soluzione del problema di Dirichlet

$$F(x_0, D^2 w + D^2 u) \,=\, 0 \quad \text{in} \quad S(\sigma) \tag{115}$$

mentre $v \in H^2(S(\sigma), \mathbb{R}^N)$ è soluzione di

$$F(x_0, D^2 v) \,=\, 0 \quad \text{in} \quad S(\sigma), \tag{116}$$

Per v vale la maggiorazione del Teorema 10.2 ovvero per ogni $t \in (0,1)$ risulta

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2 v(x)\|^2 \, dx \,\leq\, C\, t^{\lambda_1} \int_{S(\sigma)} \|D^2 v(x)\|^2 \, dx \tag{117}$$

dove $\lambda_1 = n$ se $n < q$, $\lambda_1 = n\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$ se $n > q$. Mentre w risolve il sistema

$$F(x_0, D^2 w + D^2 u) - F(x_0, D^2 u) \,=\, F(x, D^2 u) \,-\, F(x_0, D^2 u) - f(x) \tag{118}$$

Dalla *Condizione* A_x otteniamo

$$\|\Delta w\| \,\leq\, \gamma \, \|D^2 w\| \,+\, \delta \, \|\Delta w\| \,+\, \alpha \, \omega(\sigma) \, \|D^2 u\| \,+ \alpha \, \|f\|,$$

quindi

$$\|\Delta w\| \,\leq\, \frac{\gamma}{1-\delta} \, \|D^2 w\| \,+\, C(\alpha, \delta) \, \big(\omega(\sigma) \, \|D^2 u\| \,+\, \|f\|\big) \,.$$

Elevando al quadrato e maggiorando, tenuto conto del *teorema di Miranda-Talenti* si ha

$$\begin{aligned}\int_{S(\sigma)} \|D^2 w(x)\|^2 \, dx \,&\leq\, (1+\varepsilon) \left(\frac{\gamma}{1-\delta}\right)^2 \int_{S(\sigma)} \|D^2 w(x)\|^2 \, dx \,+ \\ &+ C(\varepsilon) \left[\omega^2(\sigma) \int_{S(\sigma)} \|D^2 u(x)\|^2 \, dx \,+\, \sigma^\lambda \, \|f\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)}\right].\end{aligned} \tag{119}$$

per ε piccolo segue

$$\int_{S(\sigma)} \|D^2 w(x)\|^2 \, dx \,\leq\, C(\varepsilon, \gamma, \delta) \left[\omega^2(\sigma) \int_{S(\sigma)} \|D^2 u(x)\|^2 \, dx \,+\, \sigma^\lambda \, \|f\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)}\right]. \tag{120}$$

Essendo $u = v - w$ in $S(\sigma)$ segue dalle maggiorazioni sopra:

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2 u(x)\|^2 \, dx \,\leq\, C \, \{t^\lambda \,+ \omega^2(\sigma)\} \int_{S(\sigma)} \|D^2 u(x)\|^2 \, dx \,+\, C\, \sigma^\lambda \, \|f\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)}. \tag{121}$$

A questo punto siamo nelle condizioni di utilizzare il seguente *Lemma algebrico* (vedi [21])

Lemma 13.1. *Siano $\varphi(t)$ e $\omega(t)$ funzioni non negative definite in $(0, d]$ con*

$$\lim_{t \to 0+} \, \omega(t) \,=\, 0$$

e per ogni $\sigma \in (0, \sigma]$, *per ogni* $t \in (0,1)$

$$\varphi(t\sigma) \le \{A\, t^{\alpha} + \omega(\sigma)\}\, \varphi(\sigma) + K\, \sigma^{\beta}$$

con $0 < \beta < \alpha$, $A > 0$, $\alpha \ge 0$, *allora per ogni* $\varepsilon < \alpha - \beta$ *esiste* $\sigma_\varepsilon \le d$ *tale che se* $0 < \sigma \le \sigma_\varepsilon$ *e* $t \in (0,1)$

$$\varphi(t\sigma) \le (1 + A)\, t^{\alpha-\varepsilon}\, \varphi(\sigma) + K\, M\, (t\sigma)^{\beta},$$

dove M *dipende da* $A, \varepsilon, \alpha, \beta$.

Poniamo quindi

$$\varphi(t\sigma) = \int_{S(t\sigma)} \|D^2 u(x)\|^2\, dx$$

$$K = C\, \|f\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)}$$

$$\alpha = \lambda, \quad \beta < \lambda - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

Otteniamo infine

$$\int_{S(\sigma)} \|D^2 u(x)\|^2\, dx \le C\, \sigma^{\lambda-\varepsilon} \left\{ \|D^2 u\|^2_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{n^2 N})} + \|f\|^2_{L^{2,\lambda}(\Omega, \mathbb{R}^N)} \right\} \tag{122}$$

□

Poniamo ora su F la seguente ipotesi:
esiste $c > 0$ tale che per ogni $x, y \in \Omega$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^{n^2 N}$ si ha

$$\|F(x,\xi) - F(y,\xi)\| \le C\, \|x - y\|^{\beta}\, \|\xi\|, \quad \text{dove} \quad \beta = 1 - \frac{n}{q}, \quad \text{con} \quad n < q. \tag{123}$$

Vale il seguente teorema

Teorema 13.2. *Sia* $u \in H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *soluzione del sistema (111), con* F *che verifica le ipotesi (112) e (123). Se* $f \in C^{0,\beta}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *allora anche* $D^2 u \in C^{0,\beta}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. Fissato $S(\sigma) = S(x_0, \sigma) \subset \Omega$. Il vettore u è soluzione del sistema

$$F(x, D^2 u(x)) - \{f\}_{S(\sigma)} = f(x) - \{f\}_{S(\sigma)}, \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{124}$$

In $S(\sigma)$ poniamo $u = v - w$, dove $w \in H^2 \cap H^1_0(S(\sigma), \mathbb{R}^N)$ è la soluzione del problema di Dirichlet

$$F(x_0, D^2 w + D^2 u) - \{f\}_{S(\sigma)} = 0, \quad \text{in} \quad S(\sigma). \tag{125}$$

mentre $v \in H^2(S(\sigma), \mathbb{R}^N)$ è soluzione del sistema base

$$F(x_0, D^2 v) \, - \, \{f\}_{S(\sigma)} \, = \, 0, \quad \text{in} \quad S(\sigma), \tag{126}$$

Per v vale la maggiorazione del Teorema 10.2:

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2 v(x) \, - \, \{D^2 v\}_{S(t\sigma)}\|^2 \, dx \, \le \, C \, t^{2+n\left(1-\frac{2}{q}\right)} \int_{S(\sigma)} \|D^2 v(x) \, - \, \{D^2 v\}_{S(\sigma)}\|^2 \, dx. \tag{127}$$

Per w si procede come nel precedente teorema ottenendo:

$$\int_{S(\sigma)} \|D^2 w(x)\|^2 \, dx \, \le \, C(\alpha, \gamma, \delta) \, \left\{ \sigma^{2\beta} \int_{S(\sigma)} \|D^2 u(x)\|^2 \, dx \, + \, \sigma^{n+2\beta} \, [f]^2_{C^{0,\beta}} \right\}. \tag{128}$$

Essendo $u = v - w$

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2 u(x) \, - \, \{D^2 u\}_{S(t\sigma)}\|^2 \, dx \, \le \, C \, \sigma^{2\beta} \int_{S(\sigma)} \|D^2 u(x)\|^2 \, dx \, + \, C \, \sigma^{n+2\beta} \, [f]^2_{C^{0,\beta}} + \\ + C \, t^{2+n\left(1-\frac{2}{q}\right)} \int_{S(\sigma)} \|D^2 u(x) \, - \, \{D^2 u\}_{S(\sigma)}\|^2 \, dx \, . \tag{129}$$

Essendo poi $2 + n \left(1 - \dfrac{2}{q}\right) \, = \, n \, + \, 2\beta$ per la maggiorazione (122) e per $\varepsilon > 0$

$$\int_{S(\sigma)} \|D^2 u(x)\|^2 \, dx \, \le \, C \, \sigma^{n-\varepsilon} \, \{\|D^2 u\|^2_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^{n^2 N})} \, + \, \|f\|^2_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)}\} \, = \, \sigma^{n-\varepsilon} \, K(u, f) \tag{130}$$

Da cui

$$\int_{S(t\sigma)} \|D^2 u(x) \, - \, \{D^2 u\}_{S(t\sigma)}\|^2 \, dx \, \le \, C \, t^{n+2\beta} \int_{S(\sigma)} \|D^2 u(x) \, - \, \{D^2 u\}_{S(\sigma)}\|^2 \, dx + \\ + C \, \sigma^{n+2\beta-\varepsilon} \, K(u, f) \, + \, C \, \sigma^{n+2\beta} \, [f]^2_{C^{0,\beta}} . \tag{131}$$

Applicando il Lemma 13.1 otteniamo

$$\int_{S(\sigma)} \|D^2 u(x) \, - \, \{D^2 u\}_{S(\sigma)}\|^2 \, dx \, \le \, C \, \sigma^{n+2\beta-\varepsilon} \{\|D^2 u\|^2_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)} \, + \, \|f\|^2_{C^{0,\beta}(\Omega, \mathbb{R}^N)}\}. \tag{132}$$

Quindi $D^2 u$ è localmente γ holderiana per $\gamma < \beta$, segue allora che $D^2 u$ è localmente limitata in Ω per cui se prendiamo in (130) $\varepsilon = 0$ otteniamo la tesi. □

14 Un teorema di esistenza locale

Consideriamo il sistema non lineare

$$F(x,u,Du,D^2u) = g(x,u,Du) \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{133}$$

dove

$$\begin{aligned} &F(x,u,p,\xi) \text{ è misurabile in } x, \text{ continuo in } (u,\,p,\,\xi);\\ &F(x,u,p,0) \,=\, 0;\\ &\xi \longrightarrow F(x,u,p,\xi) \quad \text{verifica la Condizione } A_x \text{ uniformemente}\\ &\text{rispetto a } (x,\,u,\,p) \text{ in } \Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{nN}. \end{aligned} \tag{134}$$

Definizione 14.1. *(Condizione A_x per sistemi non lineari)*
Diremo che l'operatore F soddisfa la Condizione A_x *se esistono due costanti reali γ, δ con $\gamma > 0$, $\delta \geq 0$, $\gamma+\delta < 1$, una funzione α misurabile e positiva definita su Ω con $0 < K_1 < \alpha(x) < K_2$, tali che*

$$\begin{aligned} &\left\|\sum_{i=1}^{n} Q_{ii} - \alpha(x)\,[F(x,u,p,Q+M) - F(x,u,p,M)]\right\|_N \leq\\ &\leq \gamma\|Q\|_{N\times n^2} + \delta\|\sum_{i=1}^{n} Q_{ii}\|_N \end{aligned} \tag{135}$$

$$\forall x\in\Omega,\ \forall u\in\mathbb{R}^N,\ \forall p\in\mathbb{R}^{n\times N},\ \forall Q,M\in R^{N\times n^2}.$$

Su g mettiamo le seguenti ipotesi

$$\begin{aligned} &g(x,u,p) \text{ è misurabile in } x \text{ e continuo in } (u,\,p);\\ &\text{ha andamento sublineare oppure lineare}:\\ &\|g(x,u,p)\|_{\mathbb{R}^N} \,\leq\, C\{\|f(x)\|^t + \|u\|^t + \|p\|^t\} \text{ con } 0 \leq\ t\ \leq 1,\\ &\text{dove } f\in L^2(\Omega,\mathbb{R}^N). \end{aligned} \tag{136}$$

Dimostriamo il seguente teorema

Teorema 14.1. *Sotto le ipotesi (134), (136) esiste σ_0 tale che, per ogni $S(\sigma)\subset\Omega$ con $\sigma\leq\sigma_0$, il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} u\in H^2\cap H_0^1(S(\sigma),\mathbb{R}^N)\\ F(x,u,Du(x),D^2u(x)) \,=\, g(x,u(x),Du(x)) \quad \text{in } S(\sigma) \end{cases} \tag{137}$$

ha almeno una soluzione.

Nella dimostrazione utilizzeremo il seguente teorema di punto fisso (vedi [34], Corollario 11.2).

Teorema 14.2. *(Birkhoff-Kellog-Schauder)*
Se $\mathcal{B}$ è uno spazio di Banach, e Σ è una sfera chiusa di $\mathcal{B}$, Σ_0 è un (relativamente) compatto contenuto in Σ, e $\mathcal{T} : \Sigma \longrightarrow \Sigma_0$ è continua, allora $\mathcal{T}$ ha almeno un punto unito in Σ.

Dimostrazione. (Del Teorema 14.1)
Fissata una sfera $S(\sigma) \subset \Omega$ ed una costante $M^* > 0$, poniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= H_0^1(S(\sigma), \mathbb{R}^N) \\ \Sigma &= \left\{ u \in H_0^1(S(\sigma), \mathbb{R}^N) : \int_{S(\sigma)} \|Du(x)\|^2 \, dx \le M^* \right\}. \end{aligned} \tag{138}$$

Consideriamo il Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} U \in H^2 \cap H_0^1(S(\sigma), \mathbb{R}^N) \\ F(x, u(x), Du(x), D^2U(x)) = g(x, u(x), Du(x)) \quad \text{in} \quad S(\sigma) \end{cases} \tag{139}$$

Osserviamo che per ogni $u \in \Sigma$, per l'andamento lineare di $g(x, u, p)$, ipotesi (136), risulta

$$g(x, u, Du) \in L^2(S(\sigma), \mathbb{R}^N), \tag{140}$$

quindi, per il Teorema 8.1, ad ogni $u \in \Sigma$ resta associato uno ed un solo $U = \mathcal{T}_1(u) \in H^2 \cap H_0^1(S(\sigma, \mathbb{R}^N))$, e in particolare risulta (come conseguenza del fatto che F verifica la *Condizione* A_x)

$$\begin{aligned} &\int_{S(\sigma)} \|D^2U(x)\|^2 \, dx \le \\ &\le C \int_{S(\sigma)} \left[\|f(x)\|^{2t} + \|u(x)\|^{2t} + \|Du(x)\|^{2t} \right] dx \le \\ &\le C\sigma^{n(1-t)} \left[\left(\int_{S(\sigma)} \|f(x)\|^2 \, dx \right)^t + \left(\int_{S(\sigma)} \|u(x)\|^2 \, dx \right)^t + \left(\int_{S(\sigma)} \|Du(x)\|^2 \, dx \right)^t \right] \le \\ &\le \sigma^{n(1-t)} M(f, M^*). \end{aligned} \tag{141}$$

Quindi $\mathcal{T}_1$ manda Σ in un limitato Γ di $H^2 \cap H_0^1(S(\sigma), \mathbb{R}^N)$. Tenuto conto della maggiorazione interpolatoria([17])

$$\int_{S(\sigma)} \|DU(x)\|^2 \, dx \le \varepsilon \int_{S(\sigma)} \|D^2U(x)\|^2 \, dx + K(\varepsilon) \int_{S(\sigma)} \|U(x)\|^2 \, dx, \tag{142}$$

[17] Per la dimostrazione vedi ad esempio [1] e [37] o per spazi più generali degli spazi di Sobolev la proposizione 4.1 del cap IV di [36].

ed applicando la *diseguaglianza di Poincaré*, otteniamo

$$\int_{S(\sigma)} \|DU(x)\|^2 \, dx \;\leq\; \frac{\varepsilon}{1-4\,K(\varepsilon)\sigma^2} \int_{S(\sigma)} \|D^2U(x)\|^2 \; dx \tag{143}$$

Dalle diseguaglianze (141) e (143) otteniamo la seguente

$$\int_{S(\sigma)} \|DU(x)\|^2 \; dx \;\leq\; \sigma^{n(1-t)}\, M(f, M^*) \, \frac{\varepsilon}{1-4\,K(\varepsilon)\sigma^2} \tag{144}$$

Possiamo scegliere $\sigma_0 > 0$ ed $\varepsilon > 0$ tali che, se $\sigma \leq \sigma_0$, e ε sufficientemente piccolo risulta per ogni $0 < t \leq 1$

$$\sigma^{n(1-t)}\, M(f, M^*) \, \frac{\varepsilon}{1-4\,K(\varepsilon)\sigma^2} \;\leq\; M^*.$$

Da questo segue che per $\sigma \leq \sigma_0$, l'applicazione $\mathcal{T}_1$ manda Σ in sè. Poniamo poi $\mathcal{T} = i \circ \mathcal{T}_1$, dove i è l'immersione di $H^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ in $H^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ che per il teorema di Rellich è compatta, di conseguenza anche $\mathcal{T}$ risulta compatta, e dunque $\Sigma_0 = i \circ \mathcal{T}_1(\Sigma)$ è relativamente compatto in $H^1(S(\sigma), \mathbb{R}^N)$. Per poter applicare il Teorema di punto fisso enunciato sopra resta quindi da provare la continuità di $\mathcal{T}$. Ovvero se

$$\begin{aligned} & u_h \longrightarrow u \quad \text{in} \quad H^1_0(S(\sigma), \mathbb{R}^N) \quad \text{con } \; u_h,\, u \in \Sigma \\ & \text{allora} \\ & U_h = \mathcal{T}(u_h) \longrightarrow U = \mathcal{T}(u) \quad \text{in} \quad H^1_0(S(\sigma)) \end{aligned} \tag{145}$$

Consideriamo i seguenti problemi di Dirichlet dei quali U_h e U sono le soluzioni

$$\begin{cases} U_h \in H^2 \cap H^1_0(S(\sigma), \mathbb{R}^N) \\ F(x, u_h(x), Du_h(x), D^2U_h(x)) \;=\; g(x, u_h(x), Du_h(x)) \quad \text{in} \quad S(\sigma) \end{cases} \tag{146}$$

$$\begin{cases} U \in H^2 \cap H^1_0(S(\sigma), \mathbb{R}^N) \\ F(x, u(x), Du(x), D^2U(x)) \;=\; g(x, u(x), Du(x)) \quad \text{in} \quad S(\sigma) \end{cases} \tag{147}$$

Di conseguenza $U_h - U$ è la soluzione del seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} U_h - U \in H^2 \cap H^1_0(S(\sigma), \mathbb{R}^N) \\ \Delta(U_h - U) \;=\; \Delta(U_h - U) \,-\, \alpha\,[F(x, u_h, Du_h, D^2U_h) \,-\, F(x, u_h, Du_h, D^2U)] \,+ \\ +\,\alpha\,[F(x, u, Du, D^2U) \,-\, F(x, u_h, Du_h, D^2U)] + \alpha[\,g(x, u_h, Du_h) - g(x, u, Du)] \quad \text{in} \quad S(\sigma), \end{cases} \tag{148}$$

(dove α è la costante che interviene nella *Condizione* A_x). Otteniamo quindi, che per ogni $\varepsilon > 0$ e per la *Condizione* A_x, valgono le seguenti diseguaglianze:

$$
\begin{aligned}
&\int_{S(\sigma)} \|\Delta(U_h(x) - U(x))\|^2\, dx \le (1+\varepsilon) \int_{S(\sigma)} \gamma\,(\gamma+\delta)\, \|D^2[U(x) - U_h(x)\|^2\, dx + \\
&+ (1+\varepsilon)\,\delta(\gamma+\delta) \int_{S(\sigma)} \|\Delta[U_h(x) - U(x)]\|^2\, dx + \\
&+ \alpha^2\, C(\varepsilon) \int_{S(\sigma)} \|F(x,u(x),Du(x),D^2U(x)) - F(x,u_h(x),Du_h(x),D^2U_h(x))\|^2\, dx + \\
&+ \alpha^2\, C(\varepsilon) \int_{S(\sigma)} \|g(x,u_h(x),Du_h(x)) - g(x,u(x),Du(x))\|^2\, dx = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}.
\end{aligned}
\tag{149}
$$

Per il *teorema di Miranda-Talenti*

$$
\mathbf{A} + \mathbf{B} \le (1+\varepsilon)\,(\gamma+\delta)^2 \int_{S(\sigma)} \|\Delta[U_h(x) - U(x)]\|^2\, dx. \tag{150}
$$

Quindi per ε sufficientemente piccolo, da (149) e (150) segue che

$$
\begin{aligned}
&\int_{S(\sigma)} \|D^2(U_h(x) - U(x))\|^2\, dx \le \\
&\le C(\alpha,\gamma,\delta) \int_{S(\sigma)} \|F(x,u(x),Du(x),D^2U(x)) - F(x,u_h(x),Du_h(x),D^2U_h(x))\|^2\, dx + \\
&+ C(\alpha,\gamma,\delta) \int_{S(\sigma)} \|g(x,u_h(x),Du_h(x)) - g(x,u(x),Du(x))\|^2\, dx\,.
\end{aligned}
\tag{151}
$$

Se $u_h \longrightarrow u$ in $H^1_0(S(\sigma),\mathbb{R}^N)$ allora $(u_h, Du_h) \longrightarrow (u, Du)$ in $L^2(S(\sigma),\mathbb{R}^{N+nN})$ e di conseguenza in $L^s(S(\sigma),\mathbb{R}^{N+nN})$, per ogni $1 \le s < 2$. Possiamo applicare il seguente teorema sulla continuità degli operatori di Němyckiĭ([18])

Teorema 14.3. *Sia $\Phi : \Omega \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verificante le ipotesi di Caratheodory. In corrispondenza di Φ consideriamo l'operatore $\mathcal{N}(W) = \Phi(x, W(x))$. Siano poi $p, q \ge 1$ e supponiamo che esista $f \in L^q(\Omega)$ e $\beta > 0$ tali che*

$$
\|\Phi(x,W)\| \le f(x) + \beta\,\|W\|^r, \qquad r = \frac{p}{q} \tag{152}
$$

allora $\mathcal{N}$ è un operatore continuo di L^p in L^q.

[18] Per la dimostrazione del teorema e le altre proprietà degli operatori di Němyckiĭ vedi ad esempio [2].

Dalla *Condizione* A_x per sistemi quasi lineari otteniamo la maggiorazione

$$F(x, u, p, \xi) \le C \, \|\xi\| \tag{153}$$

Da questa e dall'ipotesi (136) su g otteniamo che gli operatori:

$$\mathcal{N}_F(u, Du) = F(x, u(x), Du(x), D^2U(x)) \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_g(u, Du) = g(x, u(x), Du(x))$$

verificano le ipotesi del Teorema 14.3. Questo fatto ci permette di concludere la dimostrazione affermando che: se $u_h \longrightarrow u$ in $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, allora $(u_h, Du_h) \longrightarrow (u, Du)$ in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^{N+nN})$, per cui gli integrali che compaiono al secondo membro di (151) tendono a zero e quindi, sempre da questa maggiorazione segue che $U_h \longrightarrow U$ in $H^2 \cap H_0^1(S(\sigma))$ dalla quale infine si ottiene $U_h \longrightarrow U$ in $H_0^1(S(\sigma))$. $\square$

15 Equazioni totalmente non lineari con operatore differenziabile.

Il seguente teorema fornisce un legame nell'ambito degli operatori differenziabili tra quelli che soddisfano l'ipotesi di *ellitticità di Trudinger* e quelli che soddisfano la *Condizione A*.

Teorema 15.1. *Sia $F : \Omega \times \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$ misurabile in x e C^1 nelle altre variabili; supponiamo che F sia uniformemente ellittica nel senso di T.(vedi Definizione 14), con costanti $\lambda(x)$, $\Lambda(x)$ soddisfacenti*

$$\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} < \frac{\lambda(x)}{\Lambda(x)} : \tag{154}$$

allora esso soddisfa Condizione A_x.

Dimostrazione. Possiamo scrivere

$$F(x, M+tN) - F(x,M) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F(x,M)}{\partial M_{ij}}\, t\, N_{ij} + o(t), \text{ as } t \to 0^+. \tag{155}$$

(dove $o(t)$ è il simbolo di Landau: $\lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$).
Da questo, per la Definizione 14, se $t \to 0^+$ abbiamo

$$\lambda(x)\;(I|N) \;\le\; \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F(x,M)}{\partial M_{ij}} N_{ij} \;\le\; \Lambda(x)\,(I|N) \quad \forall M,N \in \mathcal{S}^n,\;\; N \ge 0. \tag{156}$$

Quindi

$$\lambda(x)\;\|\xi\|^2 \;\le\; \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F(x,M)}{\partial M_{ij}} \xi_i\,\xi_j \;\le\; \Lambda(x)\,\|\xi\|^2 \quad \forall M \in \mathcal{S}^n,\;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{157}$$

Inoltre, se $\lambda_1(x,M), \cdots, \lambda_n(x,M)$ sono gli autovalori della matrice

$$\left\{\frac{\partial F(x,M)}{\partial M_{ij}}\right\}_{i,j=1,\cdots,n},$$

abbiamo che

$$\lambda(x) \;\le\; \lambda_i(x,M) \;\le\; \Lambda(x), \quad i=1,\cdots,n,\;\; x\in\Omega,\;\; \forall M \in \mathcal{S}^n.$$

I suoi autovalori sonno inclusi nel cubo $Q = [\lambda(x), \Lambda(x)]^n$.
Il centro di Q è $(\frac{\lambda(x)+\Lambda(x)}{2}, \cdots, \frac{\lambda(x)+\Lambda(x)}{2})$. Possiamo quindi trovare un'omotetia che porta Q

nella palla con centro $(1, \cdots, 1)$ e raggio 1 prendendo $a(x) = \frac{2}{\lambda(x)+\Lambda(x)}$, infatti

$$\begin{aligned}
&\left|(I|N) \,-\, a(x) \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F(x,M)}{\partial M_{ij}}\, N_{ij}\right| \leq \\
&\leq \ \|(1,\cdots,1) - a(x)(\lambda_1(x,M),\cdots,\lambda_n(x,M))\|_{\mathbb{R}^n}\, \|N\| \leq \\
&\leq \ \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n}(1-a(x)\,\lambda_i(x,M))^2}\, \|N\| \leq \\
&\leq \ \frac{\Lambda(x)-\lambda(x)}{\Lambda(x)+\lambda(x)}\, \sqrt{n}\, \|N\|.
\end{aligned} \tag{158}$$

Da questo segue $\gamma = \sup_{x\in\Omega} \dfrac{\Lambda(x)-\lambda(x)}{\Lambda(x)+\lambda(x)}\, \sqrt{n} < 1$ Purché risulti $\inf_{x\in\Omega} \dfrac{\lambda(x)}{\Lambda(x)} > \dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$.
In fine, mediante il teorema di Lagrange, possiamo scrivere per (158)

$$\begin{aligned}
&|(I|N) - a(x)[F(x,M+N) - F(x,M)]| \,= \\
&= \ \left|(I|N) - a(x) \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F(x,M_0)}{\partial M_{ij}}\, N_{ij}\right| \leq \, \gamma\, \|N\|,
\end{aligned}$$

dove M_0 appartiene al segmento di estremi M, $M+N$. □

Riferimenti bibliografici

[1] Agmond S.: Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand Company, Princeton, (1965)

[2] Ambrosetti A., Prodi G.: Analisi non Lineare, I Quaderno, Scuola Normale Superiore, Pisa, (1973)

[3] Caffarelli L.A., Cabré X.: Fully nonlinear elliptic equations, American Mathematical Society Colloquium Publications 43, American Mathematical Society, Providence, RI, (1995)

[4] Campanato S.: Current formulation of the theory of near operator and current definition of elliptic operator, Matematiche(Catania). 51 (1996), no.2, 291-298 (1997)

[5] Campanato S.: Recent results in the theory of near operators, Potential theory and degenerate partial differential operators (Parma, 1994), 469-473, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1995)

[6] Campanato S.: Nonvariational elliptic systems, Non variational problems and partial differential equations (Isola d'Elba 1990), 75-80, Pitman Res. Notes Math. Ser., 320, Longman Sci. Tech., Harlow, (1995)

[7] Campanato S.: Il metodo delle applicazioni vicine e alcuni teoremi di analisi elementare, Proc. of Variat. Meth. Nonlin. An.and Diff. eq., Genova (1993), 60-66, E.C.I.G., Genova, (1994)

[8] Campanato S.: On the Condition of Nearness between Operators, Ann. Mat. Pura Appl.(4) 167, 243-256, (1994)

[9] Campanato S.: Sulla condizione di vicinanza tra operatori, Quaderno n.2 del Dottorato di ricerca in Matematica, Dip. di Mat., Univ. di Catania, (1993)

[10] Campanato S.: Further contributions to the theory of near mapping, Matematiche (Catania) 48 (1993), no.1,183-187, (1994)

[11] Campanato S.: A history of Cordes condition for second order elliptic operators, Boundary value problems for partial differential equations and applications, 319-325, Res. Notes Appl. Math., 29, Masson, Paris, (1993)

[12] Campanato S.: On the eigenvalues of an elliptic operator $a(x, H(u))$, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 3, no. 2, 107-110, (1992)

[13] Campanato S.: Nonvariational differential systems: a condition for local existence and uniqueness, International Symposium in honor of Renato Caccioppoli (Naples, 1989), Ricerche Mat. 40, suppl., 129-140, (1991)

[14] Campanato S.: Second-order nonvariational basic elliptic systems with nonlinearity $q \geq 2$, Nonlinear Analysis, 145–151, Quaderni Scuola Norm. Sup., Pisa, (1991)

[15] Campanato S.: Nonvariational basic parabolic systems of second order, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 2, no. 2, 129–136, (1991)

[16] Campanato S.: Nonvariational basic elliptic systems of second order, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 60 (1990), 113–131 (1993)

[17] Campanato S.: Sistemi Differenziali del 2^0 ordine di tipo ellittico, Quaderno n.1 del Dottorato di ricerca in Matematica, Dip. di Mat., Univ. di Catania, (1991)

[18] Campanato S.: $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ theory for nonlinear nonvariational differential systems, Rend. Mat. Appl. (7) 10, no. 3, 531-549,(1990)

[19] Campanato S.: A Cordes type condition for nonlinear nonvariational systems, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. (5) 13, no. 1, 307–321, (1989)

[20] Campanato S.: Existence and $\mathcal{L}^{2,\mu}$ regularity for a class of nonlinear systems with monotonicity hypothesis, Ricerche Mat. 36, suppl., 73–87, (1987)

[21] Campanato S. : Holder continuity of the solutions of some non linear elliptic systems, Adv. in Math. 48, no. 1, 16-43,(1983).

[22] Campanato S., Cannarsa P.: Differentiability and partial Hölder continuity of the solutions of nonlinear elliptic systems of order $2m$ with quadratic growth, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 8, no. 2, 285-309, (1981)

[23] Campanato S.: Second order nonvariational elliptic systems, Boll. Un. Mat. Ital. B (5) 17, no. 3, 1365–1394, (1980)

[24] Campanato S.: L^p regularity for weak solutions of parabolic systems, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 7, no. 1, 65–85, (1980)

[25] Campanato S.: Sistemi parabolici del secondo ordine, non variazionali, a coefficienti discontinui, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.) 23 (1977), 169–187, (1978)

[26] Campanato S.: Sul problema di Cauchy-Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine, non variazionali, a coefficienti discontinui, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 41, 153-163, (1968)

[27] Campanato S.: Un risultato relativo ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 21, 701-707, (1967)

[28] Chen, Ya-Zhe, Wu, Lan-Cheng: Second order elliptic equations and elliptic systems, Translated from the 1991 Chinese original by Bei Hu. Translations of Mathematical Monographs, 174. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. xiv+246 pp.

[29] Cordes, H.O.: Zero order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations, Proc. Sympos. Pure Math. 4, (1961), 157-166.

[30] Dunford, N., Schwartz, J. T.: Linear operators, Part I, Wiley and sons.

[31] Dacorogna, B. , Marcellini, P.: Implicit partial differential equations, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 37. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, (1999). xiv+273 pp.

[32] Gehering,F. W.: The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasi-conformal mapping, Acta Math. 130, 265-277, (1973).

[33] Giaquinta, M. , Modica, G.: Regularity results for some classes of higher order non linear elliptic systems, J. Reine Angew. Math., 145-169, (1979).

[34] Gilbarg D., Trudinger N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin, (1998)

[35] Krilov, N. V.: Controlled Diffusion Process, Springer-Verlag, (1980)

[36] Lions, J.L.: Equations différentielles opérationelles et problèmes aux limites, Grundleheren B. 111, Springer, Berlin, (1961)

[37] Lions, J.L., Magenes, E.: Problèmes aux limites non Homogènes et applications, vol. 1, Dunod, Paris, (1968)

[38] Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N.: Linear and quasi linear elliptic equations, Academic Press, New York, (1968)

[39] Leonardi S.: On the Campanato nearness condition, Matematiche (Catania), 48, (1993), no. 1, 179-181, (1994)

[40] Maugeri A.: Palagachev D.K., Softova L.G.: Elliptic and Parabolic Equations with Discontinuous Coefficients, Mathematical Research vol. 9, Wiley-VCH, (2000)

[41] Miranda, C.: Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale, a coefficienti discontinui, Ann. Mat. Pura App. (4) 63 (1963), 353-386.

[42] Miranda, C.: Su di una particolare equazione ellittica del secondo ordine a coefficienti discontinui, An. Sti. Univ. Al. I. Cura Jasi, N. Ser.,Sec. Ia 11B, (1965), 209-215.

[43] Nisio, M.:Stocastic differential game and viscosity solutions of Isaac equations, Nagoya Math. J. 110, 163-184, (1988)

[44] Pucci, C: Limitazioni per soluzioni di equazioni ellittiche , Ann. Mat. Pura Appl. , IV Ser. 74, (1966), 15-30.

[45] Schwartz, L.: Analyse III, Hermann, Paris.

[46] Talenti, G.: Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili, Ann. Mat. Pura Appl.,(4) **69** 1969, 285-304.

[47] Tarsia A.: Recent Developments of the Campanato Theory of Near Operators, Matematiche (Catania) , vol. LV, Supplemento n.2, 197-208 (2000)

[48] Tarsia A.: Some topological properties preserved by nearness among operators and applications to PDE, Czechoslovak Math. J. 46, 115-133,(1996)

[49] Tarsia A.: On Cordes and Campanato Conditions, Arch. Inequal. Appl. 2, no. 1, 25-39, (2004)

[50] Tarsia A.: Classes of elliptic matrices, to appear on Journal of Inequalities and Applications

[51] Tarsia A.: Differential equations and implicit function: a generalization of the near operators theorem, Tolopol Methods Nonlinear Anal., 11, 115-133, (1998)

[52] Tarsia A.: Near operators theory and fully nonlinear elliptic equations (submitted)

[53] Trudinger N.S.: Fully nonlinear, uniformly elliptic equations under natural structure conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 278, no. 2, 751-769, (1983)

[54] Yosida, K.: Functional Analysis, Springer Verlag.

[55] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analisys and its Applications, II-B: Nonlinear Monotone Operators, Springer-Verlag, New York, 1990.