INTRODUZIONE ALLA TRIGONOMETRIA

1 La trigonometria: come e perché.

La parola *trigonometria* significa *misura degli elementi di un triangolo*; problema primario di questo capitolo della matematica è quello di determinare la misura dei lati e degli angoli di un triangolo a partire da alcuni di questi elementi. Poiché un triangolo non è definito se si conoscono solo i suoi angoli (avremmo tanti triangoli simili), almeno uno dei dati deve essere un lato. È noto dalla geometria elementare che per individuare un triangolo possono essere assegnati:

1. due lati e l'angolo tra essi compreso (primo criterio di eguaglianza dei triangoli),
2. due angoli ed un lato (secondo criterio più, eventualmente, il teorema sulla somma degli angoli interni),
3. tre lati (terzo criterio).

Poniamoci dunque il seguente problema:

PROBLEMA 1

Dato un triangolo del quale si conoscono i tre elementi indicati in uno dei punti precedenti, determinarne tutti gli altri.

Affrontiamo lo studio di questo problema, esaminando per primo il caso particolare dei triangoli rettangoli. Già in questa forma il problema si presenta di natura non elementare (tranne il caso in cui siano noti due lati ed uno degli angoli acuti: il teorema di Pitagora e quello della somma degli angoli interni di un triangolo permettono di concludere in modo ovvio). Vedremo più avanti come i risultati ottenuti per triangoli rettangoli potranno essere utilizzati per studiare il caso generale. Iniziamo con due osservazioni generali.

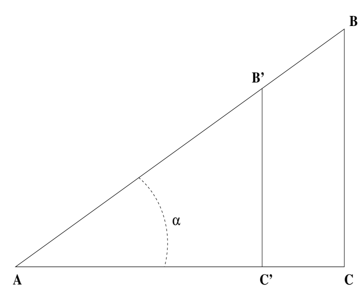


Figura 1

Osservazione **1.**

Consideriamo i triangoli ABC e $AB'C'$, rettangoli rispettivamente in C ed in C' e con lo stesso angolo in corrispondenza del vertice A (Figura 1).
Questi sono evidentemente simili e quindi si ha:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$$

Dunque in tutti i triangoli rettangoli che hanno uno stesso angolo acuto il rapporto tra un cateto e l'ipotenusa si mantiene costante.

Osservazione **2.**

Consideriamo i triangoli ABC e $AB'C'$, rettangoli rispettivamente in C e in C', aventi il vertice dell'angolo $\widehat{A}$ al centro di un cerchio e i punti B e B' sul bordo di esso (vedi Figura 2). Dalla figura risulta evidentemente $C\widehat{A}B > C'\widehat{A}B'$, mentre :

$$\frac{B'C'}{AB'} < \frac{BC}{AB}, \quad \frac{AC}{AB} < \frac{AC'}{AB'}$$

perché $AB = AB'$, $B'C' < BC$, $AC < AC'$.

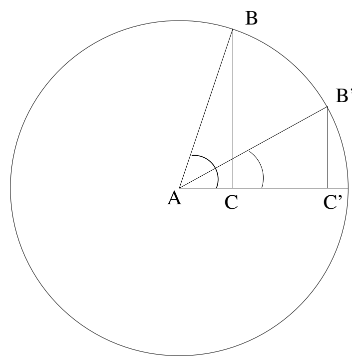


Figura 2

Dunque in triangoli rettangoli che hanno un angolo acuto diverso il rapporto tra cateto e ipotenusa cambia.
Da queste due osservazioni segue che i rapporti:

$$\frac{BC}{AB} \quad e \quad \frac{AC}{AB}$$

di un cateto con l'ipotenusa dipendono solo dall'ampiezza dell'angolo α (sono cioè funzioni di α).

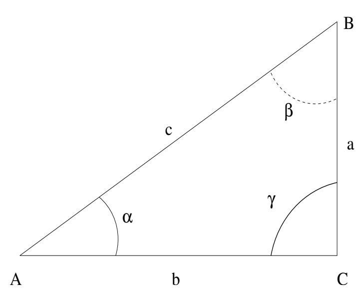


Figura 3

Le uguaglianze:
$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$
ovvero (con riferimento alla figura 3)
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \ \cos\alpha = \frac{b}{c}$$
definiscono rispettivamente le funzioni *trigonometriche seno* e *coseno.*
In altre parole $\sin\alpha$ è il rapporto tra il cateto opposto ad α e l'ipotenusa, $\cos\alpha$ quello tra il cateto adiacente ad α e l'ipotenusa. Possiamo riscrivere
$$a = c\ \sin\alpha, \quad b = c\ \cos\alpha.$$
Osserviamo che per il teorema di Pitagora si ha $a^2 + b^2 = c^2$, dunque:
$$(c\ \sin\alpha)^2 + (c\ \cos\alpha)^2 = c^2,$$
da cui otteniamo la seguente identità (detta **Relazione Pitagorica** o identità fondamentale della trigonometria):
$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \quad = \quad 1.}$$
A partire da questa identità ritroviamo un risultato che è immediato dedurre dalle definizioni date:

in un triangolo rettangolo il *seno* ed il *coseno* sono quantità **positive** e **minori o uguali** a **1**,

cioè:

in un triangolo rettangolo: $0 \leq \sin\alpha \leq 1, \quad 0 \leq \cos\alpha \leq 1.$

Siamo ora in grado di affrontare il problema che ci siamo posti in partenza (Problema 1) per i triangoli rettangoli (vedi figura 3).

i) Dati due lati e l'angolo tra essi compreso, determinare gli altri elementi del triangolo.

Noti

a, c, β	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$	$\alpha = 90^0 - \beta$	
b, c, α	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$	$\beta = 90^0 - \alpha$	
a, b, γ	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$	$\beta = 90^0 - \alpha$
"	"	$\sin\beta = \dfrac{b}{c}$	$\alpha = 90^0 - \beta$
"	"	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$	$\beta = 90^0 - \alpha$
"	"	$\cos\beta = \dfrac{a}{c}$	$\alpha = 90^0 - \beta$

Si noti che $\cos\alpha = \sin\beta$ e $\sin\alpha = \cos\beta$. Possiamo dunque dedurre da queste osservazioni la seguente identità:
$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha).$$

ii) Dati due angoli ed un lato.([1])

Noti		
$c,\ \alpha,\ \beta$	$a = c\sin\alpha$	$b = c\cos\alpha$
“	$a = c\cos\beta$	$b = c\sin\beta$
$a,\ \alpha,\ \beta$	$c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$
“	$c = \dfrac{a}{\cos\beta}$	“
$b,\ \alpha,\ \beta$	$c = \dfrac{b}{\sin\beta}$	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$
“	$c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$	“

iii) Dati tre lati.

Noti		
$a,\ b,\ c$	$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$	$\beta = 90^0 - \alpha$
“	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$	“
“	$\sin\beta = \dfrac{b}{c}$	$\alpha = 90^0 - \beta$
“	$\cos\beta = \dfrac{a}{c}$	“

Questo non è ancora l'obiettivo che ci eravamo posti all'inizio poiché le soluzioni sono state scritte utilizzando non direttamente gli angoli, ma il loro *seno* o *coseno.* Occorre saper passare dal valore della funzione a quello degli angoli e viceversa: dato $\sin\alpha$ o $\cos\alpha$ dobbiamo saper calcolare α oppure dato α calcolare $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$. La geometria ci consente di eseguire questi calcoli per un numero limitato di angoli (vedi oltre). In tutti gli altri casi si deve ricorrere agli strumenti più raffinati forniti dall'Analisi Matematica.
Esaminiamo alcuni angoli particolari per i quali è possibile calcolare *seno* e *coseno.*

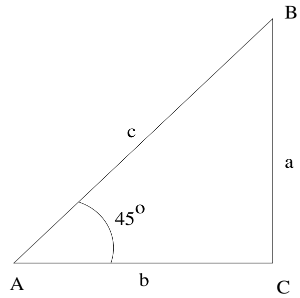
- $\alpha = 45^o$ (Figura 4)

Osserviamo che il triangolo ABC è isoscele, perché $\widehat{A} = \widehat{B} = 45^o$. Essendo dunque $a = b$, per il teorema di Pitagora risulta $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$ da cui $c = \sqrt{2}a = \sqrt{2}b$

$$\sin 45^o = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^o = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

[1] Poiché dati due angoli, il terzo è automaticamente noto, possiamo limitarci a supporre che siano assegnati α β.



$$Figura \quad 4$$

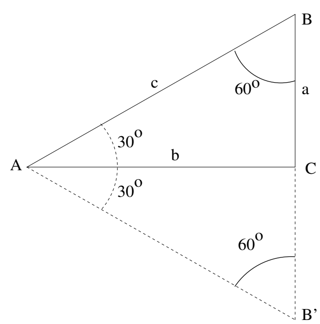
- $\alpha = 30^o$(Figura 5)

Osserviamo che il triangolo $AB'B$ è equilatero (tutti i sui angoli misurano 60^o), quindi: $a = CB = \frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c$. In definitiva:

$$\sin 30^o = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^o = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} = \frac{\sqrt{4a^2 - a^2}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

oppure dalla relazione pitagorica:

$$\cos\, 30^o = \sqrt{1 - (\sin\, 30^o)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



$$Figura \quad 5$$

- $\alpha = 60^o$ (Figura 6)

Osservando che il triangolo $AA'B$ è equilatero e ragionando come nel caso precedente, ricaviamo che $b = \frac{1}{2}c$ e quindi:

$$\cos 60^o = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}, \qquad \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\alpha = 0^o$

In questo caso il triangolo si riduce ad un segmento in cui $B \equiv C$ e dunque $a = 0$, $b = c$. Allora:

$$\sin 0^o = \frac{0}{b} = 0, \qquad \cos 0^o = \frac{c}{c} = 1.$$

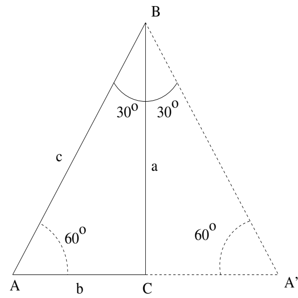


Figura 6

- $\alpha = 90^o$

Anche in questo caso il triangolo diventa un segmento, con $A \equiv B$ e dunque $c = 0$ e $a = b$. Allora:

$$\sin 90^o = \frac{a}{a} = 1, \ \ \cos 90^o = \frac{0}{b} = 0$$

2 Le funzioni trigonometriche.

Le funzioni trigonometriche sono state definite nel paragrafo precedente per gli angoli interni di un triangolo rettangolo (quindi per angoli di ampiezza compresa tra 0^o e 90^o). Nel presente paragrafo diamo una definizione delle funzioni trigonometriche per angoli di ampiezza qualunque, anche negativa. Per questo scopo, introduciamo prima la nozione di angoli orientati.

Angoli orientati.
Consideriamo l'angolo individuato dalla coppia ordinata a, b di semirette del piano con la medesima origine O.
Diremo che l'angolo è orientato se è stabilito quale delle due semirette deve considerarsi come primo lato.
Se scriviamo $\widehat{ab}$ consideriamo a come primo lato. Quindi $\widehat{ab}$ e $\widehat{ba}$ sono da considerarsi diversi (Figura 7).

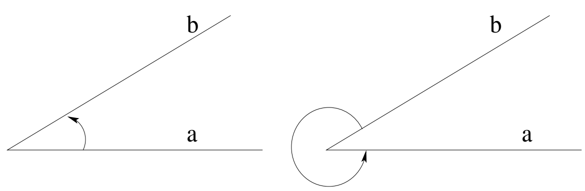


Figura 7

L'angolo $\widehat{ab}$ si dice positivo se è descritto dalla semiretta a mediante una rotazione antioraria, negativo se la rotazione è oraria.
La misura di un angolo è positiva o negativa a seconda che l'angolo sia positivo o negativo.
Supponiamo che la semiretta a si sovrapponga alla semiretta b dopo aver percorso l'angolo di misura α. La semiretta continuerà a sovrapporsi se la ruotiamo ulteriormente di uno o più angoli giri. Tenendo conto di questa considerazione, possiamo associare all'angolo $\widehat{ab}$ infiniti numeri reali della forma $\alpha + k360^0$: ognuno di essi può essere scelto come misura dell'angolo $\widehat{ab}$. In altre parole, la misura di un angolo è individuata a meno di multipli interi di 360^0 : $\text{mis}\,\widehat{\text{ab}} = \alpha + k360^o, \ 0 \leq \alpha < 360^0$. Chiameremo il valore α *misura principale* dell'angolo. A meno che non sia specificato diversamente, quando parleremo di misura di un angolo intenderemo sempre riferirci a questo valore principale.
Consideriamo un sistema di assi cartesiani aventi l'origine O nel vertice dell'angolo $\widehat{ab}$ e il semiasse positivo delle ascisse coincidente con a. Aggiungiamo inoltre una circonferenza di raggio unitario avente il centro in O e indichiamo con A e B rispettivamente l'intersezione di questa con le semirette a, b (Figura 8).

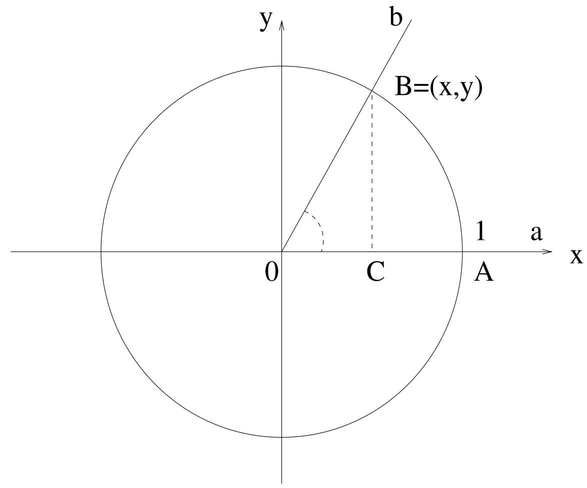


Figura 8

DEFINIZIONE **1.**
Se $B = (x, y)$ *e misura di* $\widehat{ab} = \alpha$, *poniamo:*

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x.$$

In questo modo le funzioni trigonometriche sono definite per qualunque valore dell'angolo $\widehat{ab}$ (positivo o negativo).
Nel caso in cui la misura dell'angolo abbia un valore compreso tra 0^o e 90^o ritroviamo la stessa definizione del paragrafo precedente; infatti:

$$\sin\widehat{ab} = \frac{CB}{OB} = \frac{CB}{1} = ordinata\ \ di\ \ B, \quad \cos\widehat{ab} = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = ascissa\ \ di\ \ B.$$

Continua a valere la relazione pitagorica in quanto:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = x^2 + y^2 = (BO)^2 = 1.$$

Dalla definizione data è facile verificare che:

$$\boxed{-1 \leq \sin\alpha \leq 1, \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1.}$$

Abbiamo osservato in precedenza che se $\widehat{ab}$ ha ampiezza α allora gli angoli di ampiezza $\alpha + k360^o, k \in \mathbb{Z}$ coincidono con $\widehat{ab}$, quindi anche il valore delle loro funzioni trigonometriche coincide:

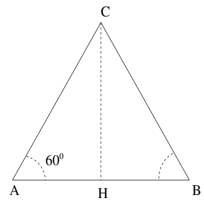
$$\boxed{\sin\alpha = \sin(\alpha + k\,360^o), \qquad \cos\alpha = \cos(\alpha + k\,360^o), \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

Queste eguaglianze provano che le funzioni *seno* e *coseno* sono periodiche di periodo 360^0. [2]

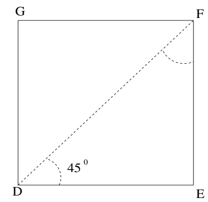
Come abbiamo già detto nelle definizioni preliminari viste nel Paragrafo 1, per calcolare esplicitamente il valore del *seno* e del *coseno* di un angolo si dovrebbero utilizzare gli strumenti dell'Analisi Matematica (formula di Taylor). In pratica basta un PC o una calcolatrice scientifica secondo le istruzioni già introdotte.

[2]Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T > 0$, se per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $f(x) = f(x + T)$.

Per un numero limitato di angoli, il risultato si può ottenere ancora per via geometrica. A tale scopo richiamiamo nelle figure sotto le relazioni rispettivamente tra altezza e lato di un triangolo equilatero (Figura 9), lato e diagonale di un quadrato (Figura 10) (si usa il teorema di Pitagora).



$Figura \quad 9$

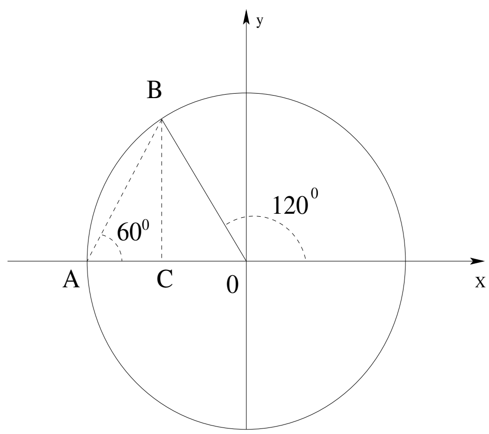


$Figura \quad 10$

$$HB = \frac{1}{2}CB, \quad HC = \frac{\sqrt{3}}{2}CB \ , \quad DF = DE\ \sqrt{2}$$

- $\alpha = 120^o$

Consideriamo il triangolo AOB (equilatero)([3]) (Figura 11) .



$Figura \quad 11$

Per quanto osservato sopra, $\sin\alpha$ = ordinata di $B = BC = \frac{\sqrt{3}}{2}OB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mentre $\cos\alpha$ = ascissa di $C = -OC = -\frac{1}{2}OB = -\frac{1}{2}$.

- $\alpha = 180^o$

Il punto B ha coordinate (-1,0), quindi: $\sin\alpha = 0,\ \cos\alpha = -1$.

- $\alpha = 225^0$ (Figura 12)

[3] Perchè $OA = OB = 1$ e $\widehat{AOB}$ misura 60^o.

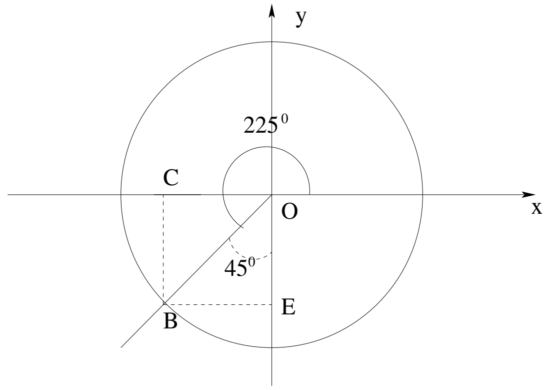


Figura 12

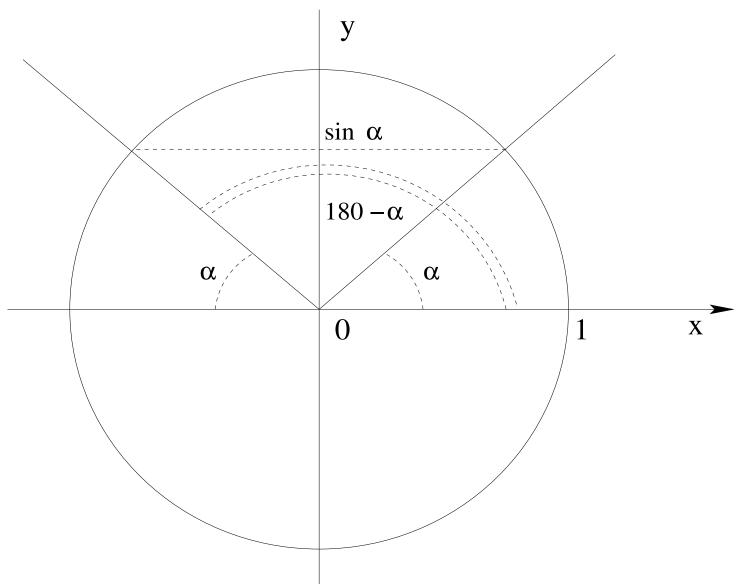
B è il vertice del quadrato $OCBE$ la cui diagonale $OB = 1$. Quindi la misura di BC è uguale alla misura di BE ed è uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tenuto conto che B si trova nel quadrante dove x e y sono negativi, possiamo scrivere:

$$\sin 225^o = \cos 225^o = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

In maniera analoga si ragiona per determinare il valore delle funzioni trigonometriche per altri angoli notevoli (vedi la tabella più avanti).

Diamo ora un esempio di come, ragionando sulla circonferenza trigonometrica, si ottiene una delle relazioni degli angoli associati riportata nella tabella.

- $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$



3 Risoluzione dei problemi sui triangoli

In questo paragrafo riprendiamo il Problema 1 sulla risoluzione dei triangoli, affrontando il caso generale. Per fare questo, abbiamo bisogno di richiamare due teoremi di trigonometria: *il teorema dei seni o di Eulero* e *il teorema del coseno o di Carnot*, entrambi validi per un triangolo qualunque ABC (figura 21).

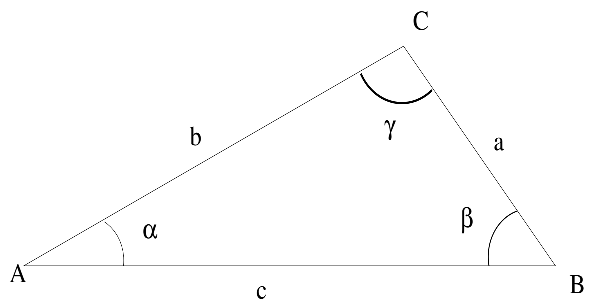


Figura 21

TEOREMA DEI SENI O DI EULERO

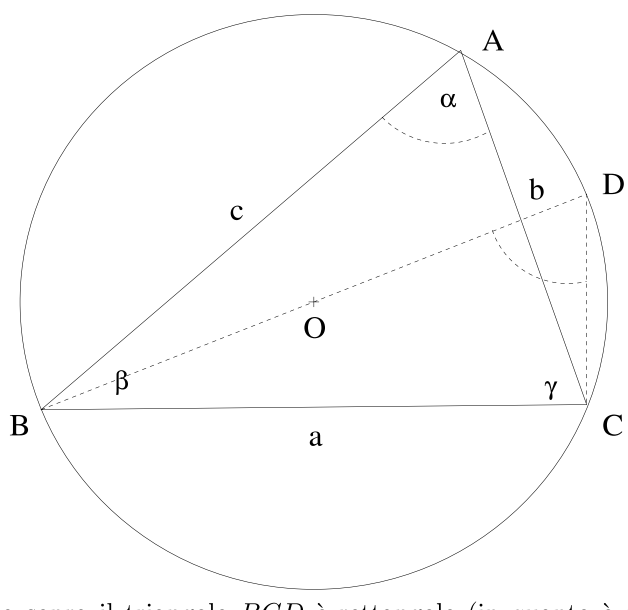
In un triangolo qualunque le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.

Questo teorema può essere espresso nella forma:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

La dimostrazione è una semplice applicazione delle formule sui triangoli rettangoli viste all'inizo del capitolo unita a delle proprietà di geometria dei triangoli inscritti nelle circonferenze. Consideriamo quindi la cisrconferenza di raggio r in cui è inscritto il triangolo dato. Si distinguono due casi.

1^0) *Il triangolo è acutangolo.*



Osserviamo che nella figura sopra il triangolo BCD è rettangolo (in quanto è stato costruito in modo da essere inscritto in una semicirconferenza e con un lato coincidente con un diametro). Basterà provare che il rapporto tra la lunghezza di un lato ed il seno dell'angolo opposto è costante, in particolare proveremo che risulta

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$$

A tale scopo osserviamo che

$$\widehat{BAC} \cong \widehat{BDC}$$

perchè sono due angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BC. Applichiamo le formule relative al triangolo rettangolo viste nel primo paragrafo al triangolo BDC :

$$\overline{BC} = \overline{BD} \cdot \sin\widehat{BDC}$$

Osserviamo che risulta

$$\overline{BC} = a,\ \overline{BD} = 2r\ \widehat{BDC} =, \widehat{BAC} = \alpha.$$

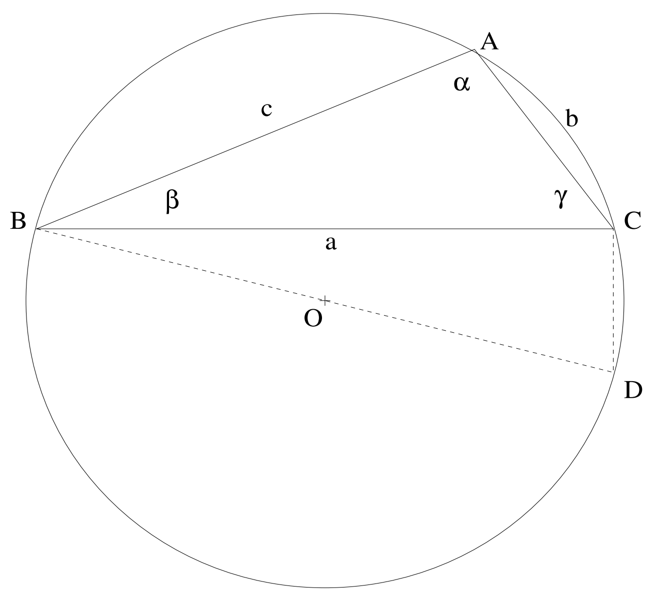
da cui

$$a = 2r\sin\alpha$$

e quindi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$$

2^0) *Il triangolo è ottusangolo.*



Si osservi che nella figura sopra gli angoli $\widehat{BAC}$ e $\widehat{BDC}$ sono supplementari, perché angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una semicirconferenza; risulta:

$$\widehat{BDC} = 180^0 - \alpha$$

Consideriamo il triangolo rettangolo BDC, si ha:

$$\overline{BC} = \overline{BD} \cdot \sin\widehat{BDC},$$

ovvero

$$a = 2r\sin\alpha$$

da cui
$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r.$$
Procedendo in maniera analoga per gli altri due angoli del triangolo, si possono scriver infine le relazioni:
$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2r, \quad \frac{b}{\sin\beta} = 2r, \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$
dalle quali otteniamo
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

TEOREMA DEL COSENO O DI CARNOT ([4])

In un triangolo qualsiasi, il quadrato della misura di ogni lato è eguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due diminuita del doppio prodotto delle misure di questi due lati per il coseno dell'angolo tra essi compreso.

In formula:
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Osservazione **3.**

Il teorema dei coseni è una generalizzazione del Teorema di Pitagora. Infatti se uno degli angoli, ad esempio α*, misura* 90^0*, sostituendo* $\cos\alpha = 0$ *nella prima eguaglianza si ottiene* $a^2 = b^2 + c^2$ *che esprime appunto l'identità pitagorica.*

A questo punto siamo in grado di risolvere il Problema 1 *per un triangolo qualunque.*

Caso i). Noti due lati e l'angolo tra essi compreso.

Se conosciamo ad esempio b, c, α, la prima delle formule del Teorema di Carnot ci permette di calcolare a, mentre dalla seconda e dalla terza ricaviamo:
$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$
Per calcolare β e γ potremmo anche ricorrere al teorema dei seni
$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$$
$$\sin\gamma = \frac{c}{a}\sin\alpha.$$
Ci sarebbe però ambiguità nel ricavare i valori di β e di γ, perché i due angoli potrebbero essere entrambi acuti oppure uno acuto e l'altro ottuso. Così, se β fosse acuto, sarebbe
$$\beta = \arcsin\left(\frac{b}{a}\sin\alpha\right)$$

[4]Lazare Carnot, (1753-1823), matematico francese. Partecipò alla Rivoluzione del 1789. Come membro del Comitato di Salute pubblica dette un contributo decisivo alla politica scientifica della Repubblica, in particolare alla fondazione delle Grandi Scuole.

″...Con la fondazione delle Grandi Scuole finì per mutare definitivamente anche il ruolo sociale del matematico, non più un dilettante, come spesso era stato nel Seicento, né un dotto o un accademico come nel Settecento. Tranne poche eccezioni, da allora in poi il mestiere del matematico sarà indissolubilmente legato a quello di insegnante, nelle Grandi Scuole in Francia, generalmente nelle università negli altri Paesi. Tale fatto avrà esiti non indifferenti anche sul modo di fare matematica. L'organizzazione delle teorie necessarie per una chiara esposizione didattica finirà infatti per riflettersi anche sugli standard di rigore accettabili in matematica.″ U. Bottazzini, *Il flauto di Hilbert*, UTET, 2003.

altrimenti

$$\beta = \pi - \arcsin\left(\frac{b}{a}\sin\alpha\right).$$

Questa ambiguità può essere risolta tenendo presente che in un triangolo a lato maggiore è opposto angolo maggiore. L'utilizzo del teorema del coseno permette invece di risolvere direttamente il problema.

Caso ii). Noti due angoli ed un lato.

Supponiamo di conoscere α, β, a. Dal teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo deduciamo subito $\gamma = 180^o - \alpha - \beta$. Per calcolare b, c utilizziamo il teorema dei seni, ottenendo

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Caso iii). Noti i tre lati.

Supponiamo di conoscere a, b, c. Dal teorema di Carnot deduciamo il coseno degli angoli α, β, γ e quindi gli angoli stessi.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tag{1}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \tag{2}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \tag{3}$$

Ovviamente le equazioni (1), (2), (3) ammettono soluzioni α, β, γ se i dati verificano rispettivamente le condizioni:

$$\left|\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right| \leq 1 \quad \left|\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right| \leq 1. \tag{4}$$

La prima di queste disequazioni equivale a

$$-1 \leq \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \leq 1, \tag{5}$$

che possiamo riscrivere successivamente nelle forme equivalenti:

$$\begin{gathered} -2bc \leq b^2 + c^2 - a^2 \quad \text{e} \quad b^2 + c^2 - a^2 \leq 2bc \\ a^2 \leq (b+c)^2 \quad \text{e} \quad (b-c)^2 \leq a^2 \\ a \leq b + c \quad \text{e} \quad |b - c| \leq a. \end{gathered} \tag{6}$$

Analogamente dalle altre disequazioni si deduce:

$$b \leq a + c \quad \text{e} \quad |a - c| \leq b,$$

$$c \leq a + b \quad \text{e} \quad |a - b| \leq c.$$

Queste sono proprio le condizioni dettate dai noti teoremi di geometria sulle relazioni tra le lunghezze dei lati di un triangolo: *in un triangolo la misura di un lato è minore della somma delle misure degli altri due e maggiore della loro differenza. L'eguaglianza si ottiene solo nel caso in cui il triangolo degeneri in un segmento.*

I dati del problema devono dunque verificare queste condizioni per individuare un triangolo.

Nello studio della risoluzione di un triangolo c'è un caso non ancora esaminato: quello in cui sono noti due lati (ad esempio a, b) ed un angolo non compreso tra essi (ad esempio α). In questa situazione i teoremi di eguaglianza dei triangoli non ci assicurano l'unicità di soluzioni (e nemmeno l'esistenza). Esaminiamo nel dettaglio il problema.

La strada più ovvia da seguire è quella di applicare il *Teorema dei seni* per calcolare l'angolo β, e di conseguenza l'angolo γ, riconducendosi così al caso i):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

ovvero

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\ \sin\alpha. \tag{7}$$

Una volta ricavato β, sarà $\gamma = 180^0 - \alpha - \beta$. Per trovare c, possiamo ricorrere al *teorema dei seni* o a quello del *coseno* .
Riprendiamo l'equazione (7): sappiamo che ha soluzione se e solo se risulta:

$$\left|\frac{b}{a}\ \sin\alpha\right| \leq 1. \tag{8}$$

Poiché α è l'angolo interno di un triangolo (e dunque $\sin\alpha \geq 0$) la condizione (8) si può riscrivere in modo equivalente nella forma

$$\frac{b}{a}\ \sin\alpha \leq 1$$

cioè

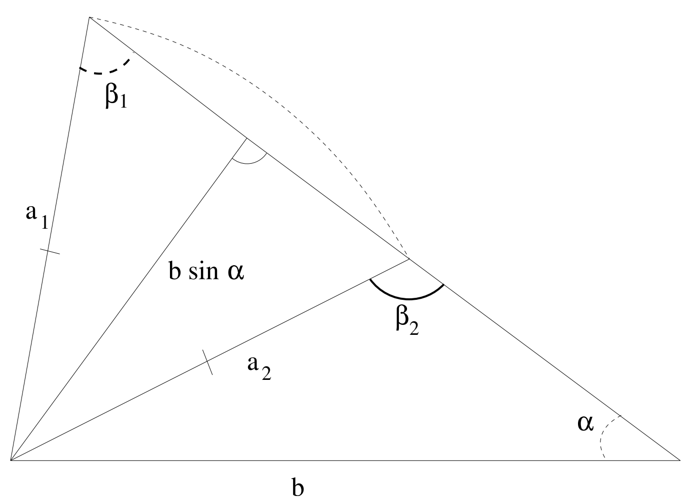
$$a \geq b\ \sin\alpha.$$

Questa condizione è dunque *necessaria* per l'esistenza del triangolo.
Se $a = b\sin\alpha$, si deduce $\sin\beta = 1$ cioè $\beta = 90^0$: in questo caso dunque il triangolo è rettangolo.
Se $a > b\sin\alpha$, l'equazione (7) fornisce due soluzioni ([5])

$$\beta = \beta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad \beta = \beta_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Perché sia possibile la scelta di β_2 deve essere $b > a$ (infatti in questo caso l'angolo β risulta maggiore dell'angolo α e dunque il lato b opposto a β deve essere maggiore del lato a opposto ad α).
Riassumendo

se	$a < b\sin\alpha$	il triangolo non esiste
se	$a = b\sin\alpha$	il triangolo è unico e rettangolo
se	$b\ \sin\alpha < a < b$	esistono due triangoli
se	$a = b$	il triangolo è unico e isoscele
se	$a > b$	il triangolo è unico.



Esempio **1.**
Siano $a = 2$, $b = 1$, $\gamma = 15^0$. *Calcolare* c, α, β.

[5]Se fosse stato dato $\alpha > \frac{\pi}{2}$, ovviamente la seconda soluzione sarebbe da scartare. Nel caso $\alpha < \frac{\pi}{2}$ a priori possono essere scelte entrambe le soluzioni.

Applicando il *teorema del coseno,* si ottiene: $c^2 = 1 + 4 - 4\cos 15^0$ da cui $c = 1,066$.
Sempre per lo stesso teorema:

$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \quad \Rightarrow \quad \beta = 14^0 3'$$

Di conseguenza $\alpha = 150^0 57'$.
Se invece usiamo il *teorema dei seni* per calcolare β, troviamo

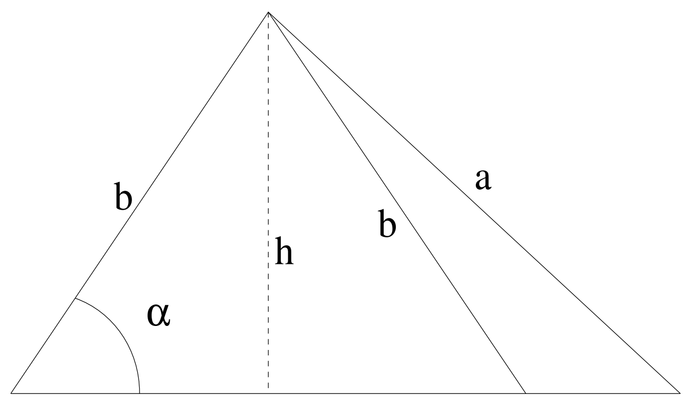
$$\frac{\sin\beta}{1} = \frac{\sin 15^0}{1,066} \quad \text{cioè} \quad \sin\beta = 0,2428$$

Quest'ultima equazione fornisce $\beta_1 = 14^0 3'$ oppure $\beta_2 = 165^0 57'$.
La soluzione β_2 è naturalmente da scartare, tenendo conto della somma degli angoli interni di un triangolo.
Avremmo potuto scartare a priori la possibilità di β angolo ottuso, perché il lato b opposto a β misura meno del lato a opposto ad α (si ricordi che a lati minori corrispondono angoli minori).
Dunque l'unica soluzione possibile per β è il valore $14^0 3'$, che coincide con il risultato trovato applicando il *teorema del coseno*.

Esempio **2.**

Siano $a = 18$, $b = 15$, $\alpha = 72^0$. *Calcolare* c, β, γ.

Sia $h = 15\sin 72^0 = 14,2658$. Poiché risulta $a > h$, il triangolo esiste; inoltre, essendo $a > b$, il triangolo è unico (vedi figura.)



Procedendo come nel precedente esercizio:

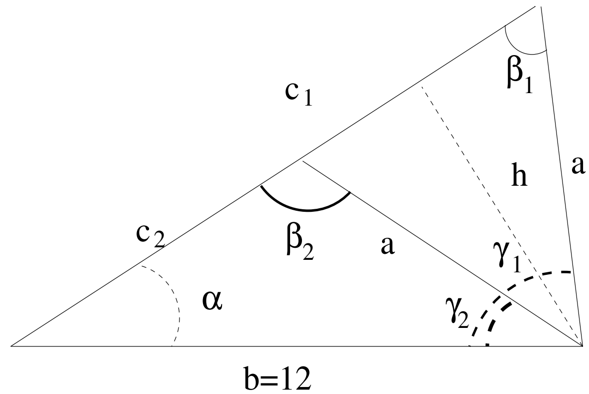
$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = 0,7925471 \quad \Rightarrow \quad \beta = 52^0 25' 27'',$$

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 55^0 34' 33'',$$

$$c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\, a = 15,612.$$

Esempio **3.**

Siano $a = 9$, $b = 12$, $\alpha = 36^0$. *Calcolare* c, β, γ.



Poiché $h = 12 \sin 36^0 = 7,053$, risulta $a > h$ e quindi il triangolo esiste, mentre dal fatto che $a < b$ si deduce che esistono due triangoli. Applichiamo il *teorema dei seni*:

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha = 0,7837137;$$

le soluzioni sono $\beta_1 = 51^0 36' 7''$ e $\beta_2 = 128^0 23' 53''$. Tenuto conto del *teorema della somma degli angoli interni di un triangolo*, possiamo calcolare il valore del terzo angolo $\gamma_1 = 92^0 23' 53''$ oppure $\gamma_2 = 15^0 36' 7''$. Applicando di nuovo il *teorema dei seni* otteniamo il valore del terzo lato

$$c_1 = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \alpha} a = 15,298, \quad \text{oppure} \quad c_2 = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha} a = 4,118.$$

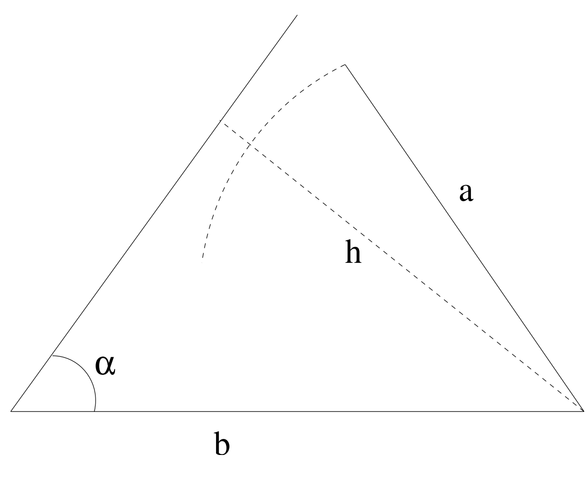
Esempio **4.**

Siano $a = 8$, $b = 10$, $\alpha = 65^0$. *Calcolare* c, β, γ.

Osserviamo che poiché risulta:

$$h = 10 \sin 65^0 = 9,063,$$

si ha $a < h$ e quindi il triangolo non esiste.



4 Misura dell'angolo in radianti

Come abbiamo visto, le funzioni trigonometriche sono definite come rapporto tra lunghezze e perciò sono quantità adimensionali. Se vogliamo che questo accada per gli angoli, occorre dare una nuova definizione: quella di misura di un angolo in radianti. Per introdurla, fissato l'angolo positivo $\widehat{ab}$ di vertice 0, consideriamo il sistema di riferimento come in Figura 13 a cui sovrapponiamo la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro l'origine e raggio R; (in questa Figura il raggio è 1) siano $A,\ B$ rispettivamente le intersezioni con le semirette $a,\ b$.

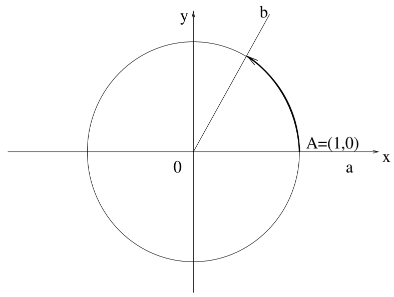


Figura 13

Indicato con $\widehat{AB}$ l'arco di circonferenza delimitato dai due punti A, B, diamo la seguente definizione:

Definizione **2.**
Si dice misura in radianti dell'angolo positivo $\widehat{ab}$ il numero reale

$$\alpha = \frac{mis\ \widehat{AB}}{raggio\ di\ \mathcal{C}}.$$

Si può dimostrare che il valore di questo rapporto non dipende dal raggio della circonferenza. ([6])

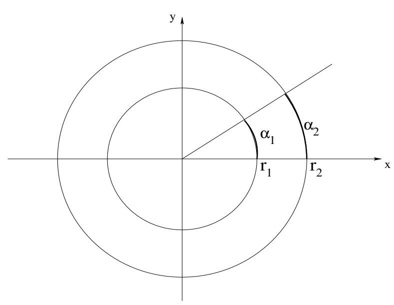


Figura 14

In particolare, se $\mathcal{C}$ è la circonferenza di raggio unitario, la misura in radianti dell'angolo coincide con la lunghezza dell'arco $\widehat{AB}$. Nel caso di un angolo giro risulta $A = B$ e l'arco $\widehat{AB}$ è l'intera circonferenza, la cui misura è dunque $2\pi R$. Dalla definizione data si deduce pertanto che la misura in radianti dell'angolo giro è 2π, quella di un angolo piatto π e quella di un angolo retto $\frac{\pi}{2}$.
In generale per passare da gradi a radianti e viceversa si usa la proporzione:

$$\alpha^o : \alpha_{rad} = 360^o : 2\pi,$$

ovvero:

$$\boxed{\alpha^o : \alpha_{rad} = 180^o : \pi}$$

[6]Ricordiamo che prese due circonferenze concentriche di raggi $r_1,\ r_2$, se consideriamo due archi di lunghezza $\alpha_1,\ \alpha_2$ sottesi dallo stesso angolo, vale la relazione: $\alpha_1 : \alpha_2 = r_1 : r_2$.(vedi figura 14)

dove α^o rappresenta la misura di $\widehat{ab}$ in gradi e α_{rad} quella di $\widehat{ab}$ in radianti.

In particolare: $1\ rad \cong 57^o18'$, $1^o = \dfrac{\pi}{180}\, rad \ \cong 0,01745\ rad$.

Ogni angolo positivo è dunque misurato da un numero reale compreso tra 0 e 2π. Se l'angolo $\widehat{ab}$ è negativo, definiamo la sua misura in radianti come l'opposto della misura in radianti dell'angolo positivo $\widehat{ba}$. Come nel caso dei gradi avevamo definito la misura a meno di multipli interi di 360^0, così adesso la misura in radianti sarà data a meno di multipli interi di 2π.

Come già detto, utilizzando la circonferenza di raggio unitario (*circonferenza goniometrica*): la misura in radianti di un angolo al centro α è uguale alla lunghezza s dell'arco da esso sotteso. Si può immaginare che la circonferenza rechi una scala numerica su cui leggere α; ad esempio, si può pensare di *avvolgere* attorno alla circonferenza una retta in cui sia stato introdotto un riferimento cartesiano avente come unità di misura la lunghezza del raggio. Si colloca l'origine nel punto $A = (1,0)$ della circonferenza e poi si avvolge la semiretta positiva in senso antiorario, quella negativa in senso orario. In questo modo l'angolo α si può leggere su questo asse curvilineo. In questa costruzione ad ogni angolo al centro corrisponde uno ed un solo punto sulla circonferenza e viceversa (*corrispondenza biunivoca*); ad ogni punto della circonferenza corrispondono però infiniti punti del'asse curvilineo e dunque infiniti numeri reali: infatti, quando si esegue l'*avvolgimento* i punti che distano tra loro $k2\pi$ unità ($k \in \mathbb{Z}$) hanno come immagine lo stesso punto.

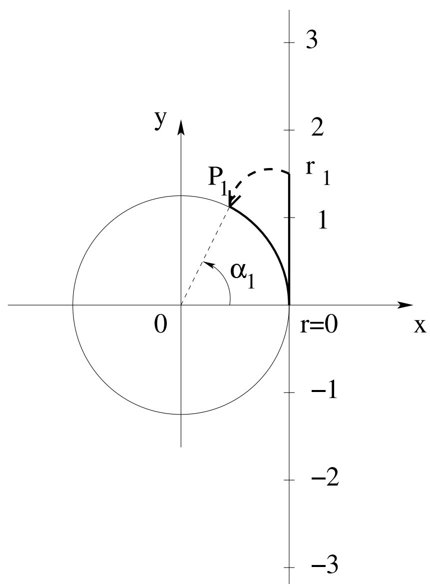


Figura 15

L'utilità che le funzioni trigonometriche e i loro argomenti abbiano la stessa unità di misura è evidente oltre che da considerazioni di carattere teorico, anche da quelle pratiche. Ricordiamo nella fisica il procedimento con il quale si deduce la legge delle piccole oscillazioni del pendolo. Nella dimostrazione della formula si osserva che per angoli piccoli $\sin\alpha \cong \alpha$ (circa uguale). Questa uguaglianza avrebbe poco senso se la grandezza al primo membro fosse espressa ad esempio in millimetri e quella al secondo membro in gradi. La tabella che segue ci dà un'idea di ciò. ([7])

$\alpha^o = \alpha\ rad$	$\sin\alpha$	Differenza, %
$0^o = 0,0000$ rad	0,0000	0,00
$2^o = 0,0349$ rad	0,0349	0,00
$5^o = 0,0873$ rad	0,0872	0,11
$10^o = 0,1745$ rad	0,1736	0,51
$15^o = 0,2618$ rad	0,2588	1,14

Osservando la Figura 16 ci si può rendere conto di quanto osservato sopra, cioè, se la misura dell'arco α è piccola, il segmento che rappresenta $\sin\alpha$ tende a coincidere con esso.

[7] vedi: R. Resnick D. Halliday , FISICA, (Parte Prima), cap.15, par. 15-5.

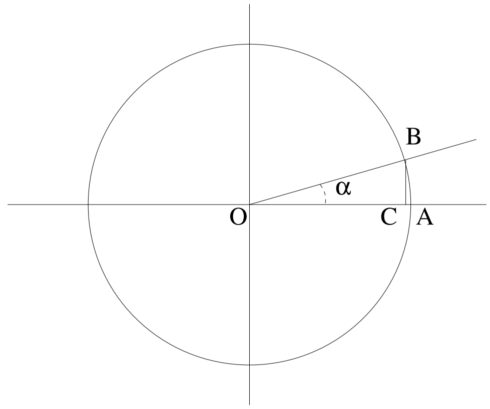


Figura 16

Come abbiamo già detto, in generale il valore di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ non può essere ottenuto per via elementare, ma solo utilizzando i metodi dell'Analisi Matematica. Possiamo però servirci di una calcolatrice. In generale la calcolatrice legge i gradi e le sue frazioni decimali, ma non quelle sessagesimali. Per gli angoli espressi in questa forma occorre operare prima una conversione (cosa che la calcolatrice fa quando viene digitato un opportuno tasto che varia a seconda del modello). Ad esempio, calcoliamo $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ per $\alpha = 30^0\ 15'\ 20''$. Ricordiamo che:

$$\text{un primo} = \frac{1}{60} \text{ di grado}, \qquad \text{un secondo} = \frac{1}{3600} \text{ di grado.}$$

Possiamo quindi scrivere

$$\alpha = 30^0 15' 20'' = \left(30 + \frac{15}{60} + \frac{20}{3600}\right)^0 = (30,2555555556)^0.$$

Digitiamo il valore ottenuto nella calcolatrice ed otteniamo:

$$\sin\ (30,2555555556)^0 = 0,5038577453, \qquad \cos\ (30,2555555556)^0 = 0,86378665384.$$

Viceversa , vogliamo calcolare l'angolo α compreso tra 0^0 e 90^0 tale che $\cos\alpha = 0,7$. Digitiamo questo valore sulla calcolatrice, poi digitiamo $\cos^{-1}$ ed otteniamo $(45,572996)^0$. A questo punto trasformiamo le frazioni decimali dei gradi ottenuti in frazioni sessagesimali (e anche per questa operazione la calcolatrice ha un tasto opportuno che deve essere digitato). Concretamente, moltiplichiamo $0,572996$ per 60 ed otteniamo $34,37976$ (primi); moltiplicando $0,37976$ per 60 otteniamo $22,7856$ (secondi). In definitiva $(45,572996)^0 = 45^0 34'(22,7856)''$.

La funzione tangente.

La funzione *tangente*, indicata $\tan\alpha$ o *tg* α, è definita attraverso l'eguaglianza:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.}$$

Il dominio di questa funzione, a differenza di quanto accade per *seno* e *coseno*, non è tutto l'insieme $\mathbb{R}$. Infatti nel rapporto che definisce la tangente il denominatore si annulla per $\alpha = 90^0 + k180^0$, ovvero per $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, valori che dobbiamo escludere dal dominio della funzione, che dunque è definita per

$$\alpha \neq 90^0 + k180^0 \quad \text{ovvero} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Osservazione **4.**

Anche $\tan\alpha$ *ha una rappresentazione geometrica come* $\sin\alpha$ *e* $\cos\alpha$*. Nella Figura 19 consideriamo i triangoli* OCB *e* OAD*. Essendo simili possiamo scrivere:* $\frac{CB}{OC} = \frac{AD}{OA}$*; ma* $OC = \cos\alpha$*,* $CB = \sin\alpha$*,* $OA = 1$ *e quindi*

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{OC}{CB} = \frac{AD}{OA} = AD.$$

Di conseguenza $\tan\alpha$ *è l'ordinata del punto* D *sulla retta tangente orientata positivamente verso l'alto. A differenza di* $\sin\alpha$ *e* $\cos\alpha$ *che variano sempre tra* -1 *e* 1*, non c'è alcuna limitazione per* $\tan\alpha$ *che varia su tutto* $\mathbb{R}$.

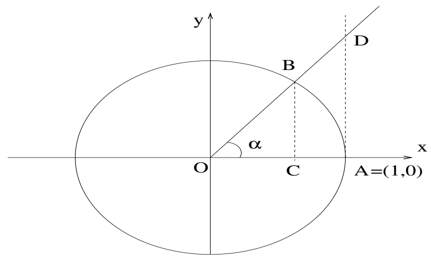


Figura 17

Possiamo definire una nuova funzione, detta *cotangente* e indicata $\cot\alpha$ (o anche *cot* α o *cotg* α), attraverso l'uguaglianza

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\cos x}{\sin x}.}$$

Questa funzione è definita se $\sin x \neq$ cioè per $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Possiamo anche scrivere

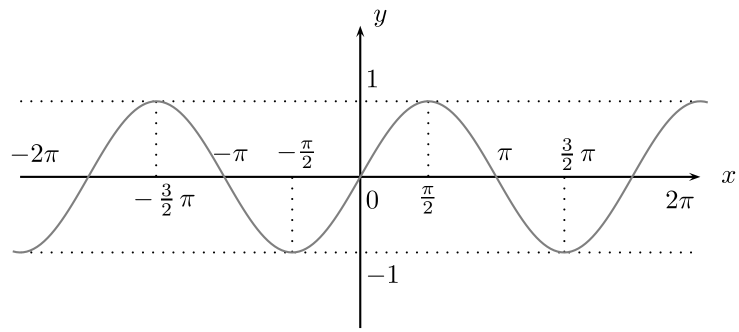
$$\boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

con la convenzione che $\cot\alpha = 0$ per $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ (cioè dove la tangente non è definita); la nuova espressione non è definita nei punti in cui $\tan\alpha = 0$, cioè appunto per $\alpha = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

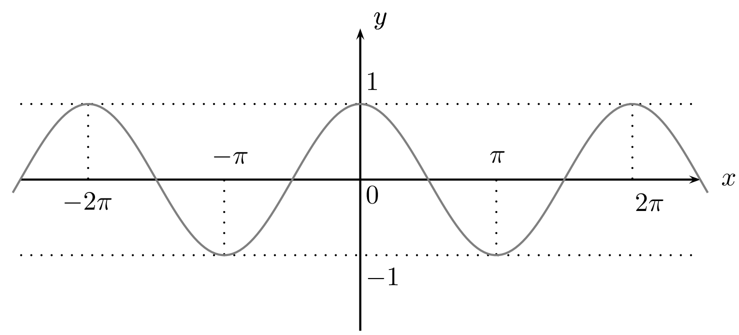
Riassumiamo nella seguente tabella quanto abbiamo ottenuto finora.

α^o	α_{rad}	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0^o	0	0	1	0
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste
120^o	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135^o	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
150^o	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180^o	π	0	-1	0
210^o	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225^o	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
240^o	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270^o	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	non esiste
300^o	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315^o	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
330^o	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
360^o	2π	0	1	0

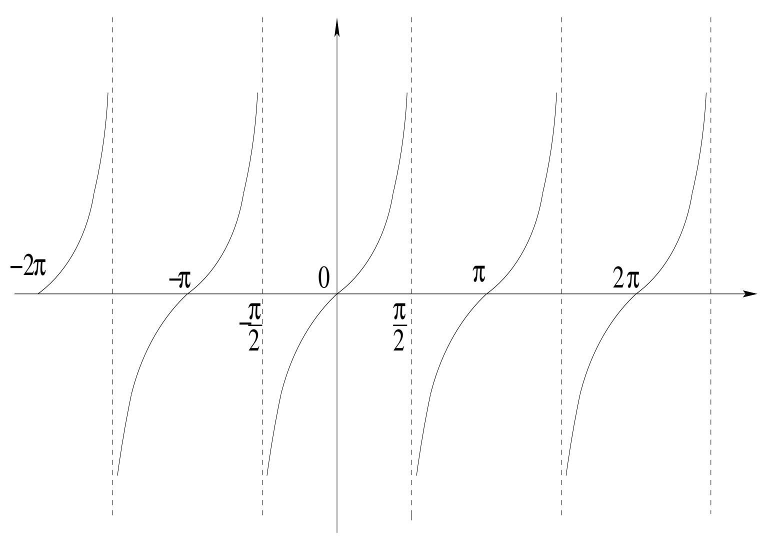
I dati riportati nella tabella ci permettono di tracciare un grafico approssimato di ciascuna funzione trigonometrica.



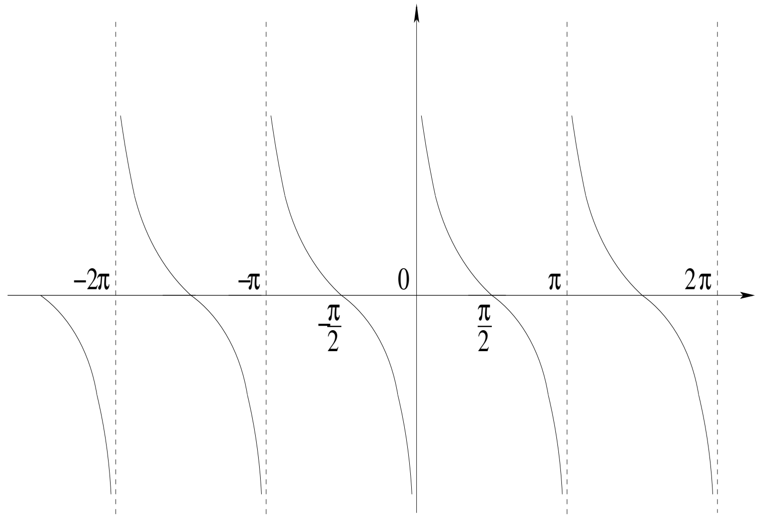
$y = \sin\, x$



$y = \cos\, x$



$y = \tan\, x$



$y = \cot x$

5 Formule della trigonometria.

In questo paragrafo riportiamo le principali formule della trigonometria, utili nella semplificazione di espressioni o equazioni in cui compaiono le funzioni trigonometriche.
Mettiamo subito in guardia il lettore dal ritenere che queste funzioni dipendano linearmente dal loro argomento. Ad esempio:

$$\sin 2x \quad \textbf{NON È UGUALE A} \quad 2\sin x$$

Infatti se $x = 45^0$ si ha che $\sin 2 \cdot 45^0 = \sin 90^0 = 1$, mentre $2\sin 45^0 = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.
Ed ancora

$$\sin(\alpha + \beta) \quad \textbf{NON È UGUALE A} \quad \sin\alpha + \sin\beta.$$

Infatti se $\alpha = 30^0$ e $\beta = 60^0$ si ha che $\sin(30^0 + 60^0) = \sin 90^0 = 1$, mentre $\sin 30^0 + \sin 60^0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$.

Noto	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\dfrac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\tan\alpha$	$\dfrac{1}{\tan\alpha}$
$\cot\alpha$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\dfrac{\cot\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cot\alpha}$	$\cot\alpha$

N.B. Quando nelle formule sopra compare $\pm$ non si intende che vadano bene entrambe le opzioni, ma il segno si sceglie in base al quadrante dove cade il secondo lato dell'angolo.

Angoli associati.

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) = -\tan\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \\ \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha \\ \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha \\ \tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha \\ \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cot\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha \\ \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\cot\alpha \end{cases}$$

Formule di addizione.

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \end{cases}$$

Formule di sottrazione.

$$\begin{cases} \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \end{cases}$$

Formule di duplicazione.

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \end{cases}$$

Formule di bisezione. [8]

$$\begin{cases} \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \\ \tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \end{cases}$$

[8] Anche in questo caso la scelta del segno si fa in base al quadrante dove cade il secondo lato dell'angolo.

Formule di prostaferesi.

$$\begin{cases} \sin p \pm \sin q = 2 \sin \frac{p \pm q}{2} \quad \cos \frac{p \mp q}{2} \\ \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \quad \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \quad \sin \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

Formule di Werner.([9])

$$\begin{cases} \sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \\ \cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \\ \sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \end{cases}$$

Espressioni di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ come funzioni razionali di $\tan\frac{\alpha}{2}$.

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

Diamo alcuni esempi di come usare le formule della trigonometria elencate sopra. Si tratta di dimostrare alcune identità.

Esempio **5.**

$$\cos^4\xi - \sin^4\xi = \cos 2\xi \tag{9}$$

Sviluppiamo il primo membro:

$$\begin{aligned} \cos^4\xi - \sin^4\xi &= (\cos^2\xi - \sin^2\xi)(\cos^2\xi + \sin^2\xi) = \text{ (per la relazione Pitagorica)} \\ &= (\cos^2\xi - \sin^2\xi)\cdot 1 = \text{ (vedi formule di duplicazione)} \\ &= \cos 2\xi. \end{aligned}$$

Esempio **6.**

$$\cos^2\frac{1}{2}\xi = \frac{\tan\xi + \sin\xi}{2\tan\xi} \tag{10}$$

Sviluppiamo il primo membro utilizzando la formula di *bisezione* del *coseno*:

$$\cos^2\frac{1}{2}\xi = \frac{1+\cos\xi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\xi$$

Sviluppiamo il secondo membro di (10)

$$\frac{\tan\xi + \sin\xi}{2\tan\xi} = \frac{\tan\xi}{2\tan\xi} + \frac{\sin\xi}{2\tan\xi} = \frac{1}{2} + \frac{\sin\xi}{2\tan\xi} = \frac{1}{2} + \frac{\sin\xi}{2\frac{\sin\xi}{\cos\xi}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\xi \tag{11}$$

L'identità è verificata.

[9] Johannes Werner, (1468-1528), matematico tedesco.

Esempio **7.**

$$(\sin\xi + \cos\xi)^2 = 1 + \sin 2\xi. \tag{12}$$

Sviluppiamo il quadrato al primo membro:

$$\begin{aligned}
(\sin\xi + \cos\xi)^2 &= \overbrace{\sin^2\xi + \cos^2\xi}^{=1} + 2\sin\xi\cos\xi = \quad \text{(relazione Pitagorica)}\\
&= 1 + 2\sin\xi\cos\xi = \quad \text{(formula di duplicazione del } \textit{seno}\text{)}\\
&= 1 + \sin 2\xi.
\end{aligned}$$

Esempio **8.**

$$\sin 2\xi \; cos\xi \; - \; \cos 2\xi \sin\xi = \sin\xi. \tag{13}$$

Applichiamo al primo membro di (13) le formule di sottrazione del *seno,* prendendo $\alpha = 2\xi$, $\beta = \xi$:

$$\sin 2\xi \;\; \cos\xi \; - \; \cos 2\xi \sin\xi = \sin(2\xi - \xi) = \sin\xi.$$

In alternativa, utilizzando le formule di duplicazione, il primo membro si scrive nella forma

$$2 \;\sin\xi \;\cos^2\xi \; - \; (\cos^2\xi \; - \; \sin^2\xi) \;\sin\xi = \sin\xi(\sin^2\xi \; + \; \cos^2\xi) = \sin\xi.$$

Esempio **9.**

$$\sin 3\xi \;\; \sin 2\xi \; = \frac{1}{2}(\cos\xi - \cos 5\xi) \tag{14}$$

Applichiamo al primo membro dell'identità le formule di Werner (vedi Tabella sopra) con $\alpha = 3\xi$, $\beta = 2\xi$:

$$\sin 3\xi \;\; \sin 2\xi \; = \frac{1}{2}[\cos(3\xi - 2\xi) - \cos(3\xi + 2\xi)],$$

da cui segue l'identità proposta.

Esempio **10.**

$$\cos\xi \; - \sin\xi \;\; \tan 2\xi \; = \; \frac{\cos 3\xi}{\cos 2\xi} \tag{15}$$

Sviluppiamo il primo membro di (15) nel modo che segue:

$$\cos\xi \; - \sin\xi \;\; \tan 2\xi \; = \cos\xi \; - \sin\xi \; \frac{\sin 2\xi}{\cos 2\xi} \; = \; \frac{\cos\xi\cos 2\xi - \sin\xi\sin 2\xi}{\cos 2\xi}, \tag{16}$$

al numeratore della frazione di (16) applichiamo la formula di addizione del *coseno* prendendo $\alpha = \xi$, $\beta = 2\xi$:

$$\cos\xi\cos 2\xi - \sin\xi\sin 2\xi = \cos(\xi + 2\xi) = \cos 3\xi.$$

Sostituendo questa espressione in (16) otteniamo l'identità (15).

Esempio **11.**

$$\sin^3\xi \; = \; \frac{1}{4}\,(3\sin\xi \; - \; \sin 3\xi) \tag{17}$$

Esprimiamo $\sin 3\xi$, utilizzando le formule di addizione del *seno* come segue:

$$\sin 3\xi = \sin(2\xi + \xi) = \sin 2\xi \cos\xi + \cos 2\xi \sin\xi,$$

sostituendo al secondo membro di (17):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\,[3\sin\xi - (\sin 2\xi\cos\xi + \cos 2\xi\sin\xi)] &= \frac{1}{4}\,[3\sin\xi - \sin 2\xi\cos\xi - \cos 2\xi\sin\xi] = \\
&\quad \text{(formule di duplicazione del seno e del coseno)} \\
&= \frac{1}{4}\,[3\sin\xi - 2\sin\xi\cos\xi\cos\xi - \sin\xi + 2\sin^3\xi] = \\
&\quad \text{(relazione Pitagorica)} \\
&= \frac{1}{4}\,[2\sin\xi - 2\sin\xi(1-\sin^2\xi) + 2\sin^3\xi] = \\
&= \frac{1}{4}\,[2\sin^3\xi + 2\sin^3\xi] = \sin^3\xi.
\end{aligned}$$

Esempio **12.**

$$\sin\xi + \sin 2\xi + \sin 3\xi = \sin 2\xi\ (1 + 2\cos\xi) \tag{18}$$

Al primo membro di (18) applichiamo le formule di addizione del *seno* alla funzione $\sin 3x$ come segue:

$$\sin 3\xi = \sin(2\xi + \xi) = \sin 2\xi \cos\xi + \cos 2\xi \sin\xi;$$

possiamo sostituire questa espressione nel primo membro di (18):

$$\begin{aligned}
\sin\xi + \sin 2\xi + \sin 3\xi &= \sin\xi + \sin 2\xi + \sin 2\xi\cos\xi + \cos 2\xi\sin\xi = \\
&= \sin 2\xi(1+\cos\xi) + \sin\xi(1+\cos 2\xi) = \\
&\quad \text{(formula di duplicazione del coseno)} \\
&= \sin 2\xi(1+\cos\xi) + \sin\xi(1 + 2\cos^2\xi\, -\, 1) = \\
&= \sin 2\xi(1+\cos\xi) + 2\sin\xi\cos\xi\cos\xi = \\
&\quad \text{(formula di duplicazione del seno)} \\
&= \sin 2\xi(1+\cos\xi) + \sin 2\xi\cos\xi = \sin 2\xi(1+2\cos\xi).
\end{aligned}$$

Esempio **13.**

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\ \cos\beta} \tag{19}$$

Esprimiamo la *tangente* come rapporto tra *seno e coseno*:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} &= \frac{\sin\alpha\ \cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\ \cos\beta} = \text{(formule di addizione del seno)} \\
&= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}
\end{aligned}$$

Esempio **14.**

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\ \cos\beta} \tag{20}$$

Si procede in maniera analoga a quella dell'esercizio precedente.

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta} &= \frac{\sin\alpha\ \cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\ \cos\beta} = \text{(formule di sottrazione del seno)}\\ &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\end{aligned}$$

6 Equazioni goniometriche elementari

Un'equazione goniometrica è un'equazione in cui l'incognita compare come argomento di una funzione trigonometrica.
Nei casi più elementari, dato $m \in \mathbb{R}$, si tratta di determinare (se esiste) $x \in \mathbb{R}$ tale che:

$$1)\ \sin x = m,$$

oppure

$$2)\ \cos x = m,$$

oppure

$$3)\ \tan x = m.$$

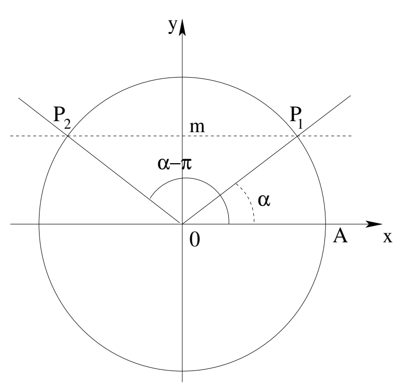
Esaminiamo in dettaglio ciascuno di questi casi.

$\boxed{1)\ \sin x = m}$

Questa equazione ha soluzione se e solo se $m \in [-1, 1]$ (vedi definizione di seno); se $\alpha \in \mathbb{R}$ è una soluzione, tutte le soluzioni si possono scrivere nella forma:

$$x = \alpha + 2h\pi \quad \text{oppure} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad h, k \in \mathbb{Z},$$

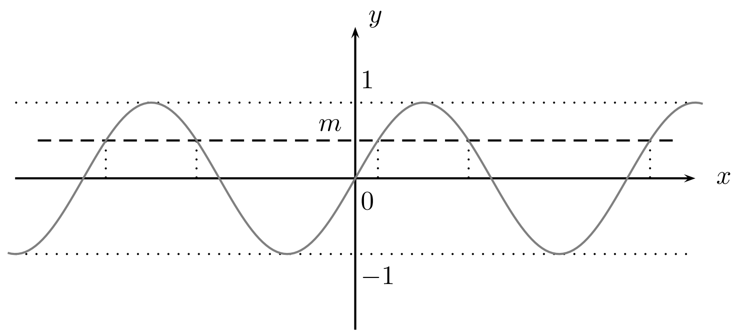
ovvero, in maniera più concisa, $x = (-1)^k\alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.



Infatti le soluzioni possono essere ottenute graficamente intersecando la circonferenza goniometrica con la retta $y = m$. I punti P_1, P_2 di intersezione individuano gli angoli $\widehat{AOP_1}$, $\widehat{AOP_2}$ le cui misure in radianti forniscono le soluzioni dell'equazione:

$$x = \alpha + 2k\pi,\ \ x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

È evidente che queste soluzioni esistono se e solo se $|m| \leq 1$; in particolare, se $m = \pm 1$ i due punti P_1 e P_2 coincidono e invece di due infinità di soluzioni ne troviamo solo una ($x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, se $m = 1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, se $m = -1$). Un altro metodo grafico di risoluzione consiste nel trovare i punti di intersezione della retta $y = m$ con il grafico della funzione *seno*: le ascisse di questi punti sono le soluzioni.



Una ed una sola di queste soluzioni cade nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Chiameremo questa soluzione **arcsin m** (*arcoseno*) (vedi, più avanti, §5) . Le soluzioni possono essere riscritte nella forma :

$$x = \arcsin m + 2k\pi, \;\; x = \pi - \arcsin m + 2k\pi, \;\;\; k \in \mathbb{Z},$$

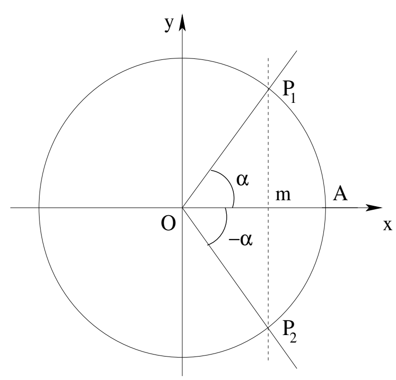
ovvero

$$x = (-1)^k \arcsin m + k\pi, \;\;\; k \in \mathbb{Z}.$$

$\boxed{2) \; \cos x = m}$

Questa equazione ha soluzione se e solo se $m \in [-1, 1]$ (vedi definizione di coseno); se $\alpha \in \mathbb{R}$ è una soluzione, tutte le soluzioni si possono scrivere nella forma

$$x = \pm\alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



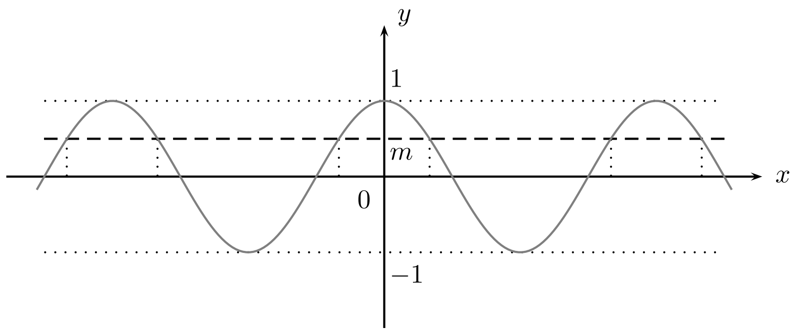
Infatti le soluzioni si possono ottenere graficamente intersecando la circonferenza goniometrica con la retta $x = m$. I punti P_1 P_2 di intersezione individuano gli angoli $\widehat{AOP_1}$, $\widehat{AOP_2}$ le cui misure in radianti forniscono le soluzioni dell'equazione:

$$x = \alpha + 2k\pi, \;\; x = -\alpha + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

È evidente che queste soluzioni esistono se e solo se $|m| \leq 1$; in particolare, se $m = \pm 1$ i due punti P_1, P_2 coincidono ed invece di due infinità di soluzioni ne troviamo solo una, cioè $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ se $m = 1$; $x = \pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ se $m = -1$. Come nel caso della funzione *seno* anche per la funzione *coseno* si può utilizzare un altro metodo di risoluzione grafica, che consiste nel trovare i punti di intersezione della retta $y = m$ con il grafico della funzione *coseno*: le ascisse di questi punti sono le soluzioni dell'equazione. Una ed una sola di queste soluzioni cade nell'intervallo $[0, \pi]$. Chiameremo questa soluzione **arcos m** (*arcocoseno*)(vedi, più avanti, §5).

Le soluzioni possono dunque essere riscritte nella forma

$$x = \pm \arccos m + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



$\boxed{\text{3) } \tan x = m}$

Questa equazione ha soluzione per ogni valore reale di di m; se $\alpha \in \mathbb{R}$ è una soluzione, tutte le altre si possono scrivere nella forma

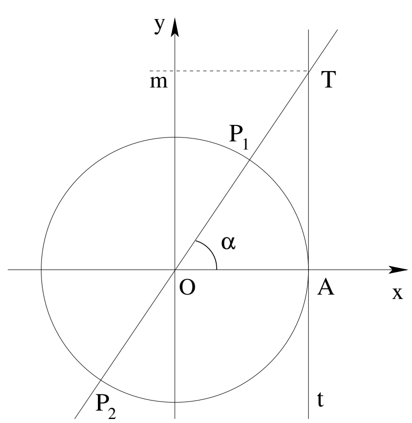
$$x = \alpha + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

Dal punto di vista geometrico, la retta orizzontale di equazione $y = m$ interseca la retta tangente alla circonferenza goniometrica in un punto T; a sua volta la retta per O e T interseca la circonferenza nei due punti P_1 e P_2. La misura in radianti degli angoli $\widehat{AOP_1}$, $\widehat{AOP_2}$ fornisce le soluzioni dell'equazione:

$$x = \alpha + k\,2\pi \quad \text{oppure} \quad x = \alpha + \pi + k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

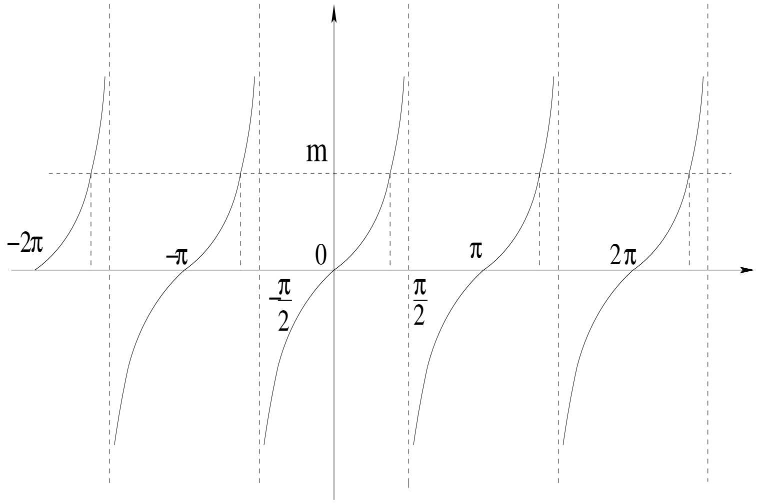
che possiamo riscrivere più semplicemente nella forma

$$x = \alpha + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Anche in questo caso possiamo considerare l'intersezione della retta $y = m$ con il grafico della funzione *tangente*: le ascisse di questi punti sono le soluzioni dell'equazione.
Una ed una sola di queste cade nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Chiameremo questa soluzione **arctan m** (*arcotangente*) (vedi, più avanti, §5). Le soluzioni possono essere scritte anche nella forma

$$x = \arctan m + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Esempio **15.**

Risolvere l'equazione: $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Consultando la tabella con i valori notevoli delle funzioni trigonometriche, vediamo che una soluzione è $\frac{\pi}{3}$. Dunque tutte le soluzioni dell'equazione sono:

$$x = \frac{\pi}{3} + h2\pi, \quad \text{oppure} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, \; h, k \in \mathbb{Z}$$

In maniera più sintetica: $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Esempio **16.**

Determinare (con un'approssimazione di 10^{-9}*) le soluzioni sull'intervallo* $[0, 2\pi]$ *dell'equazione:* $\sin x = 0.8$.

Il valore proposto non è tra quelli notevoli indicati nella tabella. Ricorriamo ad una calcolatrice scientifica (o al computer). Digitiamo 0.8 e poi $\sin^{-1}$. Sul display compare

$$\sin^{-1} 0.8 =^{RAD} 0.927295218$$

le soluzioni sono:

$$x_1 = 0.927295218, \quad \text{e} \quad x_2 = 2.214297436.$$

Esempio **17.**

Risolvere l'equazione: $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Consultando la tabella, vediamo che una soluzione è $x = \frac{3\pi}{4}$. Un primo insieme di soluzioni è dunque dato da:

$$x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre, abbiamo visto che se α è soluzione lo è anche $-\alpha$, dunque un'altro insieme di soluzioni è dato da:

$$x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

che può essere espresso anche nella forma:

$$x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

coerentemente con il fatto che nella tabella troviamo, oltre alla soluzione $\dfrac{3\pi}{4}$, anche $\dfrac{5\pi}{4}$.

Esempio **18.**

Determinare (con un'approssimazione di 10^{-9}*) le soluzioni dell'equazione:* $\cos x = 0.9$ *sull'intervallo* $[0, 2\pi]$.

Anche in questo caso il valore proposto non è tra quelli notevoli indicati nella tabella. Ricorriamo ad una calcolatrice scientifica (o al computer). Digitiamo 0.9 e poi $\cos^{-1}$. Sul display compare

$$\cos^{-1} 0.9 =^{RAD} 0.451026811$$

una soluzione è $x = 0.451026811$; l'altra non è $x = -0.451026811$, perché non cade nell'intervallo considerato, ma $x = 5.832158495$.

Esempio **19.**

Risolvere l'equazione $\cos x = 6$.

L'equazione data non ammette soluzioni, perché la funzione *coseno* può assumere solamente valori compresi tra -1 e 1.

Esempio **20.**

Risolvere l'equazione: $\tan x = \sqrt{3}$.

Dalla tabella ricaviamo che il minore degli angoli positivi la cui tangente è $\sqrt{3}$ ha misura $\frac{\pi}{3}$. Le soluzioni dell'equazione data sono:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

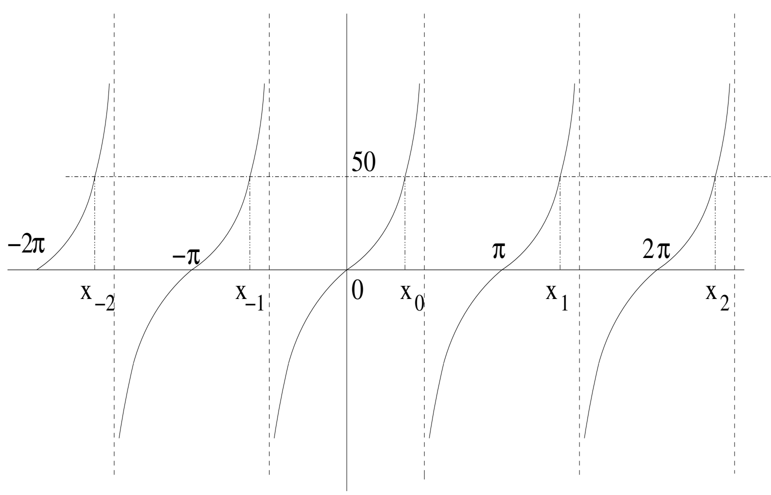
Esempio **21.**

Determinare (con un'approssimazione di 10^{-9}*) le soluzioni nell'intervallo* $[0, 2\pi]$ *dell'equazione:* $\tan x = 50$.

Digitiamo sul pc o sulla calcolatrice 50 e poi $\tan^{-1}$. Sul display compare

$$\tan^{-1} 50 =^{RAD} 1.550798993;$$

le soluzioni sono (vedi figura seguente): $x_0 = 1.550798993$, $x_1 = 4.692391646$; gli altri valori che verificano l'equazione non cadono nell'intervallo $[0, 2\pi]$.



7 Funzioni trigonometriche inverse

Le funzioni trigonometriche, in quanto periodiche, non sono iniettive (e di conseguenza nemmeno invertibili) nel loro dominio: lo diventano se ristrette ad opportuni intervalli che possono essere scelti in modo da lasciare invariata l'immagine.

• **Funzione inversa della funzione seno.**

La funzione $x \longrightarrow \sin x$ è **crescente** sull'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ([10])

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x_1 < \sin x_2.$$

La restrizione f della *funzione seno* all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ha come immagine $[-1, 1]$; la funzione

$$\sin : \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \longrightarrow \quad [-1, 1]$$

è invertibile; alla funzione inversa diamo il nome di **arcoseno** e scriviamo

$$f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

Dunque

$$\arcsin : \quad [-1, 1] \quad \longrightarrow \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Il valore $x = arcsen\, m$:

- ha senso solo se $m \in [-1, 1]$;
- è l'unico valore $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $\sin x = m$, cioè è l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin x \;=\; m \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione elementare $\sin\, x = m$ (con $m \in [-1, 1]$) si possono dunque scrivere nella forma

$$x \;=\; \arcsin m \;+\; k2\pi \quad \text{oppure} \quad x \;=\; \pi \;-\; \arcsin m \;+\; k2\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Il grafico della *funzione arcoseno* è riportato nella figura sotto.

---

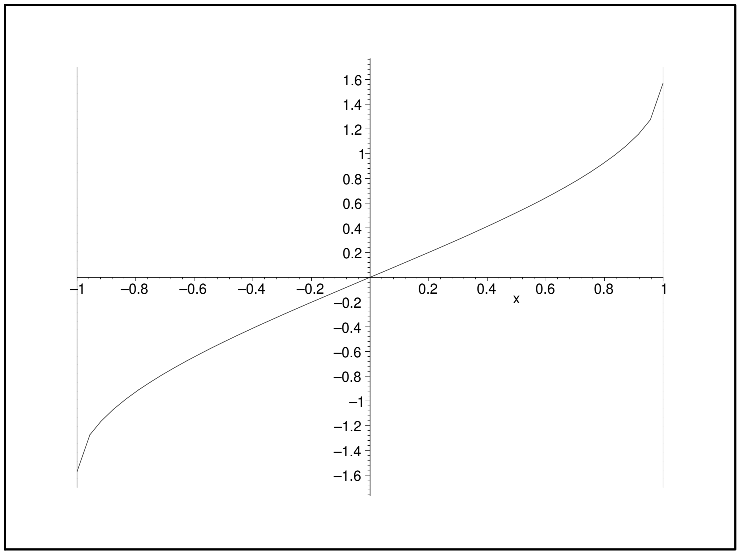
[10]Infatti, presi $x_1,\, x_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, con $x_1 < x_2$ risulta:

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\;\sin \frac{x_2 - x_1}{2}\;\;\cos \frac{x_2 + x_1}{2} > 0,$$

perché

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2} \;\;\Rightarrow\;\; -\pi < x_1 + x_2 < \pi \;\;\Rightarrow\;\; -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \;\;\Rightarrow\;\; \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \;>\; 0,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2} \;\;\Rightarrow\;\; 0 < x_2 - x_1 < \pi \;\;\Rightarrow\;\; 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2} \;\;\Rightarrow\;\; \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \;>\; 0.$$



$y = \arcsin x$

• **Funzione inversa della funzione coseno.**

La funzione $x \longrightarrow \cos x$ è **decrescente** sull'intervallo $[0, \pi]$ ([11])

$$0 \;\leq\; x_1 \;<\; x_2 \;\leq\; \pi \quad\Rightarrow\quad \cos\, x_1 \;>\; \cos x_2 .$$

La restrizione f della *funzione coseno* all'intervallo $[0, \pi]$ ha come immagine $[-1, 1]$; la funzione

$$\cos : \quad [0, \pi] \quad\longrightarrow\quad [-1, 1]$$

è invertibile; alla funzione inversa diamo il nome di **arcocoseno** e scriviamo

$$f^{-1}(x) = \arccos x.$$

Dunque

$$\arccos : \quad [-1, 1] \quad\longrightarrow\quad [0, \pi]\,.$$

Il valore $x = arcos\, m$:

- ha senso solo se $m \in [-1, 1]$;
- è l'unico valore $x \in [0, \pi]$ tale che $\cos x = m$, cioè è l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} \quad x \in [0, \pi] \\ \quad \cos x \;=\; m \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione elementare cos $x = m$ (con $m \in [-1, 1]$) si possono dunque scrivere nella forma

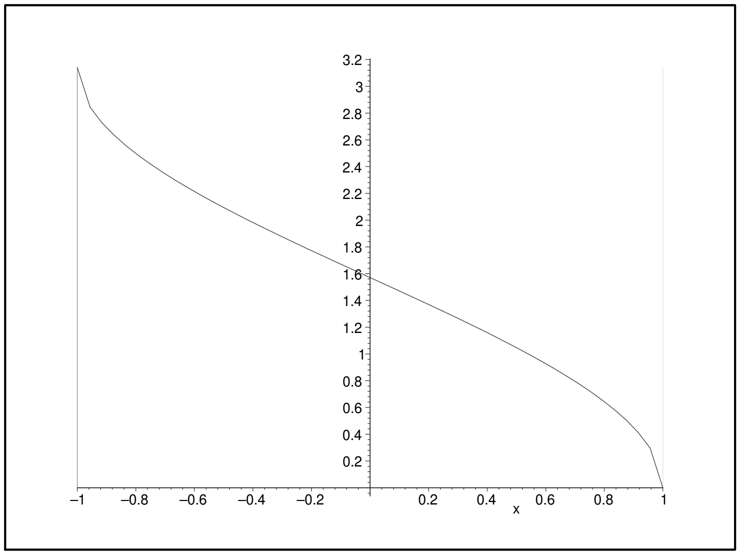
$$x \;=\; \pm\; \arccos m \;+\; k2\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Il grafico della *funzione arcocoseno* è riportato nella figura sotto.

[11] Infatti, presi x_1, $x_2 \in [0, \pi]$, con $x_1 < x_2$ risulta:

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2\ \sin \frac{x_2 + x_1}{2}\ \ \sin \frac{x_2 - x_1}{2} < 0,$$

perché, essendo $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$, allora sin $\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$; mentre da $0 < \frac{x_2 + x_1}{2} < \pi$ segue sin $\frac{x_2 + x_1}{2} > 0$.



$y = \arccos x$

• **Funzione inversa della funzione tangente.**

La funzione $x \longrightarrow \tan x$ è **crescente** sull'intervallo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ([12])

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \;\; \Rightarrow \;\; \tan x_1 < \tan x_2.$$

La restrizione f della *funzione tangente* all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ha come immagine $\mathbb{R}$; la funzione

$$\tan : \;\; \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$$

è invertibile; alla funzione inversa diamo il nome di **arcotangente** e scriviamo

$$f^{-1}(x) = \arctan x.$$

Dunque

$$\arctan : \;\; \mathbb{R} \;\longrightarrow\; \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Il valore $x = arctan\, m$:

- ha senso per ogni $m \in \mathbb{R}$;
- è l'unico valore $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ tale che $\tan x = m$, cioè è l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \tan x \;=\; m \end{cases}$$

[12]Infatti, presi $x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, con $x_1 < x_2$ risulta:

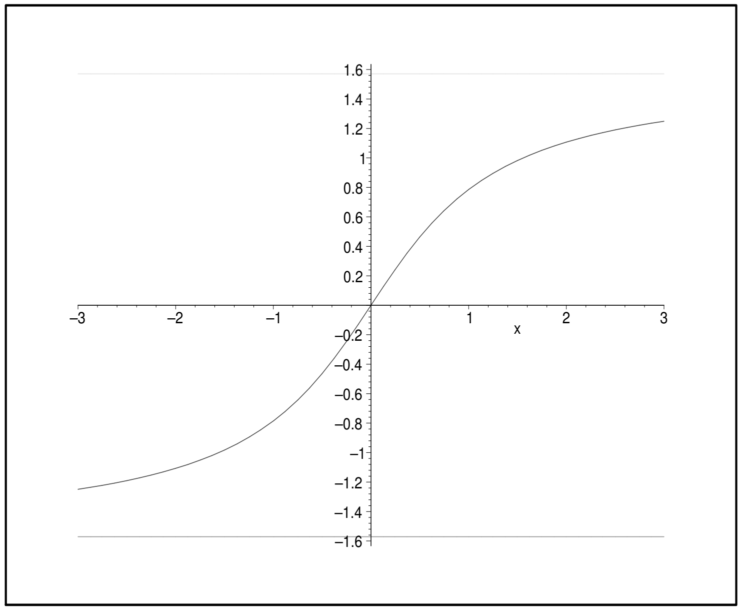
$$-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \;\; \Rightarrow \;\; \tan x_2 - \tan x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\cos x_1 \;\cos x_2} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \;\cos x_2} > 0,$$

perché $0 \,<\, x_2 \,-\, x_1 \,<\, \pi$.

Le soluzioni dell'equazione elementare $\tan x = m$ (con $m \in \mathbb{R}$) si possono dunque scrivere nella forma

$$x = \arctan m + k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Il grafico della *funzione arcotangente* è riportato nella figura sotto.



$y = \arctan y$

Le tre funzioni arcsin, *arccos*, *arctan* non sono indipendenti tra loro: le prime due possono essere calcolate utilizzando solo la terza.
Infatti, se è $\sin x = m$ e se $\sqrt{1-m^2} \neq 0$, allora senza ambiguità di segno sarà $\tan x = \dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$, perché nell'intervallo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *seno* e *tangente* hanno lo stesso segno. Dunque

$$\arcsin m = \arctan \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}.$$

Analogamente, se $\cos x = m$, sarà $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = m$ e quindi $\dfrac{\pi}{2} - x = \arcsin m$, da cui si ricava $x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin m$. In definitiva, se $1 - m^2 \neq 0$,

$$\arccos m = \frac{\pi}{2} - \arcsin m = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}.$$

8 Altre equazioni trigonometriche

In generale le equazioni goniometriche si presentano come eguaglianze tra espressioni in cui compaiono le funzioni trigonometriche che hanno l'incognita come argomento. Per risolverle si cercherà, applicando le formule della trigonometria (vedi il paragrafo precedente), di semplificare le espressioni fino a ridursi ad una delle equazioni elementari viste in precedenza. Diamo qui di seguito alcuni esempi di questo procedimento.

Esempio **22.**
Risolvere le equazioni

$$\sin rx = \sin sx, \tag{21}$$

$$\cos rx = \cos sx, \tag{22}$$

$$\tan rx = \tan sx. \tag{23}$$

Se $r \neq \pm s$ si risolvono tenendo conto dei risultati elementari già stabiliti. Infatti l'equazione (21) è verificata per quei valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali risulta:

$$rx = sx + h2\pi, \ \ h \in \mathbb{Z}$$

oppure

$$rx = \pi - sx + k2\pi, \ \ k \in \mathbb{N},$$

da cui

$$x = \frac{h2\pi}{r-s}, \ \text{ oppure } \ x = \frac{(2k+1)\pi}{r+s}.$$

L'equazione (22) è verificata per quei valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali risulta:

$$rx = \pm sx + k2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{k2\pi}{r \pm s}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'equazione (23) è verificata per quei valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali risulta:

$$rx = sx + k\pi \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{r-s}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio **1.**
Risolvere l'equazione:

$$\sin 3x = \sin 2x.$$

L'equazione ha come soluzioni le x tali che: $3x = 2x + h2\pi, \ \ h \in \mathbb{Z}$ oppure $3x = \pi - 2x + k2\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$. Quindi:

$$x = h2\pi, \ \ h \in \mathbb{Z}, \ \text{ oppure } \ x \ = \ \frac{(1+2k)\pi}{5}, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio **2.**
Risolvere l'equazione:

$$\cos 7x = \cos 4x.$$

Le soluzioni x sono tali che $7x = \pm 4x + h2\pi, \ \ h \in \mathbb{Z}$, da cui: $3x = h2\pi$ oppure $11x = h2\pi, h \in \mathbb{Z}$, cioè: $x = \frac{2}{3}h\pi$ oppure $x = \frac{2}{11}h\pi, \ \ h \in \mathbb{Z}$.

Esercizio **3.**
Risolvere l'equazione:

$$\tan 6x = \tan 2x.$$

Deve essere $6x = 2x + h\pi,\ \ h \in \mathbb{Z}$, cioè $x = \frac{h\pi}{4},\ \ h \in \mathbb{Z}$.

Esercizio **4.**
Risolvere l'equazione:

$$\sin(6x - 10^0) = \sin(3x + 50^0).$$

L'equazione ha soluzioni che risolvono $6x - 10^0 = 3x + 50^0 + h360^0$, $h \in \mathbb{Z}$, oppure $6x - 10^0 = 180^0 - (3x + 50^0) + k360^0,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Dunque:

$$x = \frac{60^0 + h360^0}{3} \ \text{ oppure } \ x = \frac{-40^0 + (1+2k)180^0}{9},\ \ h, k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio **5.**
Risolvere l'equazione:

$$\cos(4x + 40^0) = \cos(x - 30^0).$$

Dall'equazione data otteniamo: $4x + 40^0 = \pm(x - 30^0) + k360^0,\ \ k \in \mathbb{Z}$, da cui si ricava:

$$x = \frac{-70^0 + k360^0}{3},\ \ k \in \mathbb{Z}, \ \text{ oppure } \ x = \frac{-10^0 + h360^0}{5},\ \ h \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio **6.**
Risolvere l'equazione:

$$\tan(6x + 35^0) = \tan(2x + 15^0)$$

Tenendo conto delle proprietà della funzione tangente: $6x + 35^0 = 2x + 15^0 + k180^0,\ \ k \in \mathbb{Z}$, da cui

$$x = \frac{-20^0 + k180^0}{4},\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio **7.**
Risolvere l'equazione:

$$\sin 2x \ = \ \cos 3x$$

Tenendo conto dell'identità $\cos 3x \ = \ \sin\left(3x \ + \ \dfrac{\pi}{2}\right)$ l'equazione assegnata può essere riscritta nella forma

$$\sin 2x = \sin\left(3x \ + \ \frac{\pi}{2}\right).$$

Le soluzioni x sono tali che $2x = 3x + \frac{\pi}{2} + h2\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, oppure $2x = \pi - 3x - \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi:

$$x \ = \ -\frac{\pi}{2} \ + \ h2\pi,\ \ h \in \mathbb{Z}, \quad \text{oppure} \quad x \ = \ \frac{\pi}{10} \ + \ k\,\frac{2}{5}\,\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Equazioni lineari in $\sin x$ e $\cos x$.

Sono le equazioni del tipo:

$$a \ \ \sin x + b\cos x \ = \ c, \quad \text{con} \quad a,\ b \neq 0. \tag{24}$$

I) Sia $c = 0$.

Osserviamo che deve essere $\cos x \neq 0$, perché altrimenti si avrebbe $\sin x = \pm 1$ e sostituendo nell'equazione (24) si otterrebbe $a = 0$, contrariamente all'ipotesi fatta. Possiamo dunque dividere entrambi membri dell'equazione (24) per $\cos x$ ottenendo

$$a\tan x + b = 0 \ \text{ cioè } \quad \tan x = -\frac{b}{a}$$

che è un' equazione elementare già studiata.

Esempio **23.**

Risolvere l'equazione:

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

Dividiamo per $\cos x$:

$$\tan x - \sqrt{3} = 0 \iff \tan x = \sqrt{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

II) Sia $c \neq 0$.

i)*Risoluzione mediante la trasformazione di* seno *e* coseno *come funzioni razionali di* $\tan \dfrac{\alpha}{2}$

Sostituiamo al posto di $\sin x$ e $\cos x$ le loro espressioni razionali in termini di $\tan \frac{x}{2}$:

$$a \, \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + b \, \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = c \tag{25}$$

Raccogliendo a fattor comune e semplificando:

$$(b + c) \tan^2 \frac{x}{2} - 2a \tan \frac{x}{2} + c - b = 0. \tag{26}$$

Se $b + c = 0$ si tratta di un'equazione elementare già vista in precedenza. Se $b + c \neq 0$, ponendo $y = \tan \frac{x}{2}$ si ottiene un'equazione di secondo grado in y. Osserviamo che le espressioni razionali usate hanno senso solo se è $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, cioè $x \neq \pi + 2k\pi$. Occorre dunque controllare separatamente se questi valori esclusi sono soluzioni dell'equazione di partenza.

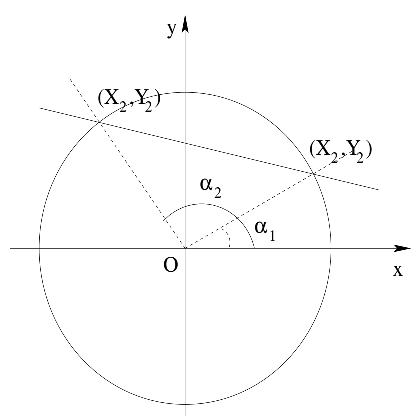
ii) *Risoluzione geometrica.*

Ponendo $X = \cos x$, $Y = \sin x$, l'equazione data si traduce nel sistema

$$\begin{cases} aX + bY = c \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

dove la seconda equazione equivale a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dal punto di vista geometrico il sistema studia le intersezioni tra una retta e la circonferenza goniometrica. Trovati i punti di intersezione (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), le soluzione dell'equazione di partenza si ottengono risolvendo i sistemi formati dalle equazioni elementari:

$$\begin{cases} \cos x = X_1 \\ \sin x = Y_1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \cos x = X_2 \\ \sin x = Y_2 \end{cases}$$



Esempio **24.**
Risolvere l'equazione:
$$(1-\sqrt{3})\cos x + (1+\sqrt{3})\sin x = 2$$

Ponendo $X = \cos x$, $Y = \sin x$, otteniamo il sistema
$$\begin{cases} (1-\sqrt{3})X + (1+\sqrt{3})Y = 2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$
le cui soluzioni sono:
$$(X_1, Y_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{e} \quad (X_2, Y_2) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$
Dobbiamo quindi risolvere:
$$(I)\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II)\begin{cases} \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$
Il sistema (I) ha soluzione $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$, perché la prima equazione viene risolta dai valori $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ oppure $x = -\frac{\pi}{3} + 2h\pi$, mentre la seconda dai valori $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ oppure $x = \frac{2\pi}{3} + h2\pi$. Il sistema (II) ha soluzione $x = \frac{5}{6}\pi + h2\pi,\ \ h \in \mathbb{Z}$ perché la prima equazione viene risolta dai valori $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ oppure $x = -\frac{5\pi}{6} + 2h\pi$, mentre la seconda dai valori $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ oppure $x = \frac{5\pi}{6} + h2\pi$.

iii) *Risoluzione con altri artifici algebrici.*

L'equazione (24) può essere risolta ricorrendo all'introduzione di una nuova incognita e utilizzando le formule di addizione del *seno*.
L'idea segue dalla seguente osservazione.

Osservazione **5.**
Dimostrare che per ogni $a,\ b, \in \mathbb{R}$ *esiste* $\varphi \in \mathbb{R}$ *tale che*
$$a\ \sin x\ +\ b\ \cos x\ =\ \sqrt{a^2+b^2}\ \sin(x+\varphi), \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{27}$$

Applichiamo le formule di addizione al secondo membro dell'identità
$$a\ \sin x\ +\ b\ \cos x\ =\ \sqrt{a^2+b^2}\ \sin x \cos\varphi\ +\ \sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi\cos x$$
ed otteniamo le soluzioni risolvendo il sistema di equazioni
$$\begin{cases} \cos\varphi\ =\ \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi\ =\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$
Poiché
$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\ +\ \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\ =\ 1,$$
la soluzione del sistema esiste ed è individuata a meno di multipli interi di 2π.

Ciò stabilito, riprendiamo l'equazione dell'Esempio 24:

$$(1+\sqrt{3})\,\sin x \,+\, (1-\sqrt{3})\,\cos x \,=\, 2. \tag{28}$$

Facendo riferimento alle notazioni dell'Osservazione (5), possiamo scrivere: $a = 1+\sqrt{3}$, $b = 1-\sqrt{3}$, $\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{2}$; di conseguenza il sistema da risolvere per determinare l'incognita ausiliaria φ è il seguente:

$$\begin{cases} \cos\varphi \,=\, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 0,97 \\[2ex] \sin\varphi \,=\, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -0,26. \end{cases} \tag{29}$$

Risolviamo, moltiplicando membro a membro le equazioni del sistema. Si ottiene

$$2\ \sin\varphi\ \cos\varphi \,=\, -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\varphi \,=\, -\frac{1}{2}.$$

Le soluzioni dell'equazione così ottenuta sono

$$\varphi \,=\, -\frac{\pi}{12} \,+\, k\pi \quad \text{oppure} \quad \varphi \,=\, -\frac{5}{12}\,\pi \,+\, h\pi, \quad h,k\in\mathbb{Z}.$$

Tra queste si trova per verifica diretta che risolvono il sistema (29) solo

$$\varphi \,=\, -\frac{\pi}{12} \,+\, k2\pi, \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{30}$$

Inoltre dalle equazioni (27), (28) segue

$$\sin(x+\varphi) \,=\, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ovvero

$$x+\varphi \,=\, \frac{\pi}{4} \,+\, h2\pi \quad \text{oppure} \quad x+\varphi \,=\, \frac{3}{4}\pi \,+\, k2\pi, \quad h,k\in\mathbb{Z}.$$

Tenuto conto di (30) si ha infine

$$x \,=\, \frac{\pi}{3} \,+\, h2\pi, \quad \text{e} \quad x \,=\, \frac{5}{6}\,\pi \,+\, k2\pi, \quad h,k\in\mathbb{Z}.$$

Equazioni omogenee di secondo grado in $\sin x$ e $\cos x$.

Sono equazioni del tipo:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \tag{31}$$

I) Sia $d = 0$.
Se $a = 0$ l'equazione assume la forma

$$\cos x\ (b\sin x + c\cos x) = 0$$

che equivale a due equazioni già studiate:

$$\cos x = 0 \quad \text{oppure} \quad b\sin x + c\cos x = 0.$$

Se $a \neq 0$ i valori di x per cui $\cos x = 0$ (e dunque $\sin x = \pm 1$) non risolvono l'equazione. Possiamo dunque dividere per $\cos^2 x$, ottenendo l'equazione

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$$

di secondo grado in $\tan x$, che risolviamo ponendo $y = \tan x$.

II) Sia $d \neq 0$.
Ci riconduciamo al caso precedente sostituendo il secondo membro con $d\,(\sin^2 x + \cos^2 x)$.
L'equazione assume la forma

$$(a-d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c-d)\cos^2 x = 0. \tag{32}$$

Esempio **25.**
Risolvere l'equazione:

$$\sin^2 x - 2\cos^2 x - \sin x\ \cos x = 0.$$

Poiché i valori di x per cui $\cos x = 0$ non risolvono l'equazione, possiamo dividere per $\cos^2 x$ e scrivere

$$\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$$

Posto $\tan x = t$, l'equazione di secondo grado in t

$$t^2 - t - 2 = 0$$

fornisce $t = 2$ oppure $t = -1$ e quindi

$$\begin{array}{rcl} \tan x = 2 & \Rightarrow & x = \arctan 2 + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}, \\ \tan x = -1 & \Rightarrow & x = -\dfrac{\pi}{4} + h\pi,\ \ h \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Esempio **26.**
Risolvere l'equazione:

$$\sin^2 x - 2\cos^2 x - \sin x\ \cos x = 1.$$

Sostituito il secondo membro con $\sin^2 x + \cos^2 x$, possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$3\cos^2 x + \sin x\cos x = 0$$

da cui segue

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + h\pi,\ \ h \in \mathbb{Z}$$

oppure

$$3\cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \tan x = -3 \Rightarrow x = -\arctan 3 + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Esempio **27.**
Risolvere l'equazione:

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin x - 2 = 0.$$

L'equazione non rientra nei casi esaminati. In genere la risoluzione di equazioni di questo tipo avviene in tre passi.

1^o) *Far comparire un'unica funzione nell'equazione.*

Utilizzando l'*identità fondamentale,* possiamo sostituire $\cos^2 x$ con $1-\sin^2 x$ in modo da ottenere un'equazione in cui compare una sola funzione trigonometrica:

$$\sin^2 x + 3(1-\sin^2 x) + \sin x - 2 = 0$$

cioè

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

2^o) *Risolvere l'equazione ottenuta considerando la funzione trigonometrica come incognita.*
Ponendo $y = \sin x$ ci riconduciamo a risolvere l'equazione di secondo grado

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

che ha come soluzioni $y_1 = 1$ e $y_2 = -\frac{1}{2}$.

3^o) *Risolvere le equazioni elementari ottenute.*
Dobbiamo risolvere le due equazioni elementari: $\sin x = 1$ (che ha soluzioni: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$) e $\sin x = -\frac{1}{2}$ (che ha soluzioni $x = \frac{7}{6}\pi + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z}$ e $x = \frac{11}{6}\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$).

9 Disequazioni goniometriche.

Per la risoluzione delle disequazioni goniometriche vale quanto detto sopra per le equazioni, quindi, o una disequazione è elementare o dobbiamo ricondurla a questo tipo utilizzando opportunamente le formule della trigonometria. Vediamo qualche esempio.

Esempio **28.**
Risolvere la disequazione:

$$\sin x < \frac{1}{2}.$$

L'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$ ha soluzioni $x = \frac{\pi}{6} + h2\pi,\ h \in \mathbb{Z}$, e $x = \frac{5}{6}\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

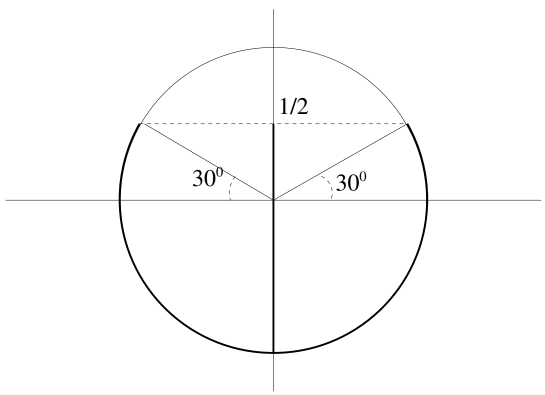


Figura 18

Nella Figura 18 osserviamo che possiamo scrivere gli archi che verificano la disequazione nella forma:

$$0 + h2\pi < x < \frac{\pi}{6} + h2\pi,\ \ h \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{5}{6}\pi + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi = 2(k+1)\pi,$$

ovvero

$$-\frac{7}{6}\pi + k2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ \ h, k \in \mathbb{Z}.$$

Esempio **29.**
Risolvere la disequazione:

$$\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

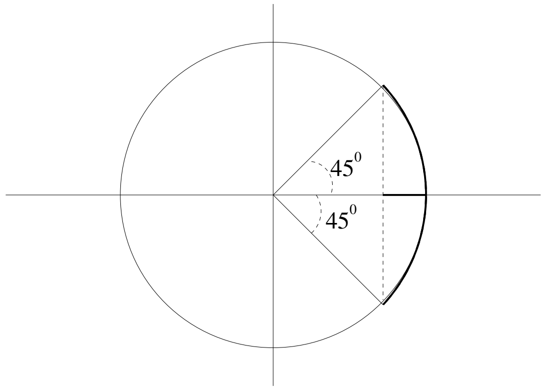


Figura 19

L'equazione $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ha soluzioni: $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Dalla Figura 19 deduciamo che la disequazione è verificata da:

$$0 + k2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

oppure

$$-\frac{\pi}{4} + h2\pi < x < 0 + 2h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Possiamo sintetizzare nella forma

$$-\ \frac{\pi}{4}\ +\ k2\pi\ <\ x\ <\ \frac{\pi}{4}\ +\ k2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Esempio **30.**

Risolvere la disequazione:

$$\tan x < 1.$$

Con procedimento analogo a quello dei casi precedenti iniziamo col risolvere l'equazione $\tan x = 1$ e poi ricorriamo al grafico della funzione *tangente* (vedi Figura 20).

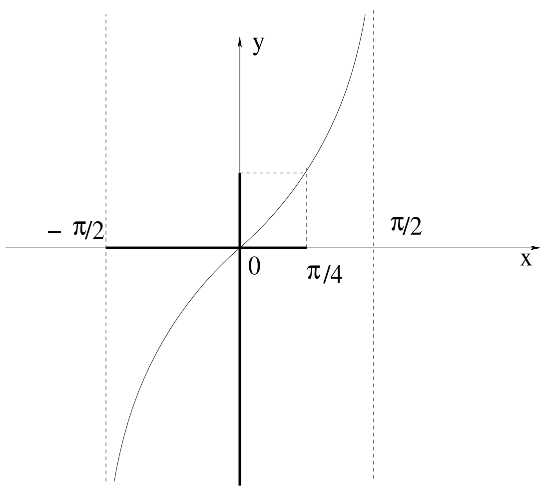


Figura 20

Le soluzioni nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sono quindi: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$. Tenendo conto della periodicità della funzione tangente abbiamo, in definitiva:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

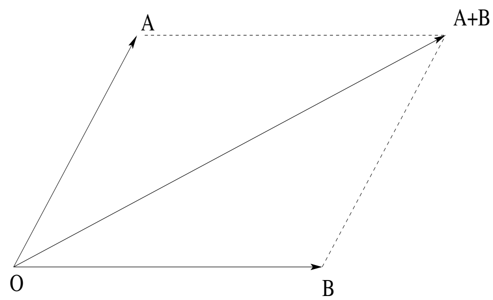
10 Trigonometria e vettori

I **vettori** sono segmenti rettilinei orientati, caratterizzati da una direzione, un verso e una lunghezza. Due vettori sono uguali quando hanno in comune questi elementi. Per semplicità prenderemo in considerazione solo i vettori del piano.

Fissato un punto O del piano, consideriamo i vettori il cui primo estremo sia questo punto: parleremo in questo caso di vettori applicati in O. La direzione, il verso e la lunghezza del vettore applicato lo individuano completamente. Poiché il vettore $\overrightarrow{OA}$ è individuato dall'estremo libero A, possiamo identificare i vettori applicati nell'origine con i punti del piano cartesiano e parlare del vettore A invece di $\overrightarrow{OA}$.

Per **lunghezza** (oppure ampiezza, intensità) del vettore A si intende la lunghezza del segmento OA, cioè la distanza del punto A da O.

Siano A, B due vettori; la loro **somma** $A + B$ è il vettore associato al quarto vertice del parallelogramma, avente gli altri vertici in O, A, B. La somma definita in questo modo si dice seguire la **regola del parallelogramma**.



Il prodotto di un vettore A per un numero c è il vettore cA che ha:

- la direzione di A,
- il verso di A se $c > 0$, il verso opposto se $c < 0$,
- la lunghezza di A moltiplicata per $|c|$.

Se $c = 0$ si ottiene il vettore nullo O.

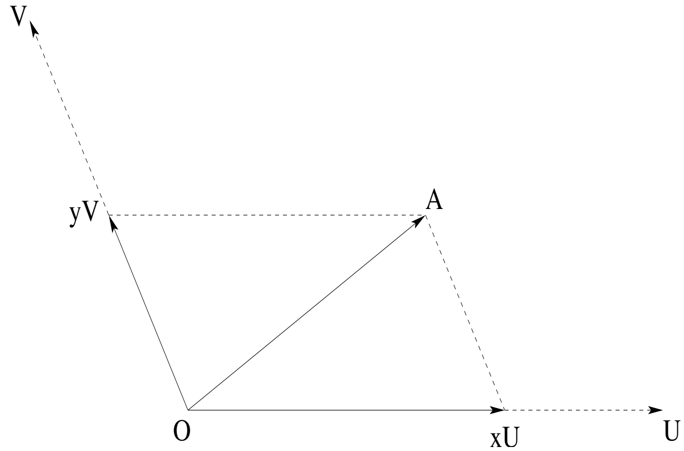
La **lunghezza** di un vettore A si indica $\|A\|$; dunque $\|cA\| = |c|\|A\|$.

Il **prodotto scalare** $A \cdot B$ di due vettori è il numero $\|A\|\|B\| \cos\theta$, essendo θ l'angolo formato dai due vettori (non è importante stabilire l'ordine con cui si scelgono, dato che $\cos\theta = \cos(-\theta)$.

Fissati due vettori U, V non paralleli (cioè i punti U, V non sono allineati con l'origine), scomporre un vettore A rispetto ai vettori dati significa trovare due numeri $x,\ y$ tali che

$$A = xU + yV.$$

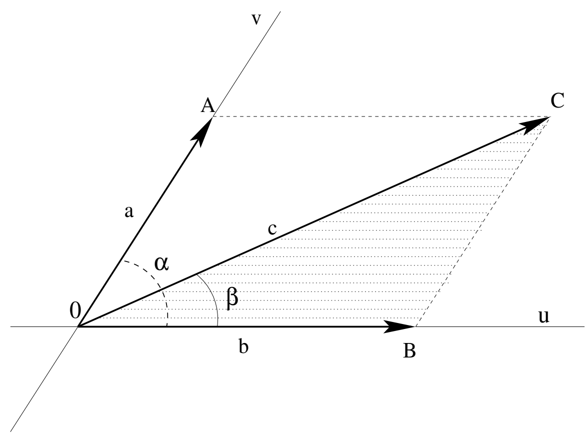
Questi due numeri si dicono componenti di A rispetto alle due direzioni assegnate. La costruzione geometrica della scomposizione secondo due direzioni è riportata nella figura sottostante.



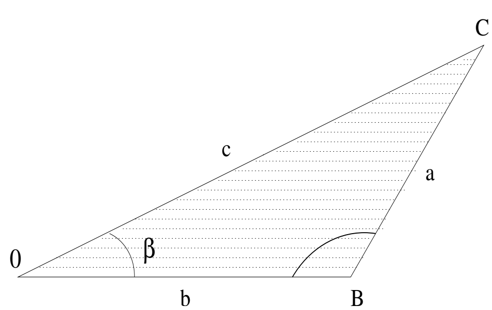
Diamo alcuni esempi dei problemi relativi al calcolo vettoriale risolti con l'impiego della trigonometria.

Problema **1.**

Siano u0v il sistema di riferimento individuato dalle due direzioni assegnate dal problema e α *l'angolo orientato formato dai due assi. Sia poi* C *un vettore di lunghezza* c *che forma un angolo* β *con il semiasse positivo delle* u*. Vogliamo trovare i vettori* A, B *aventi le direzioni assegnate e tali che risulti* $C = A + B$*, secondo la* regola del parallelogramma.



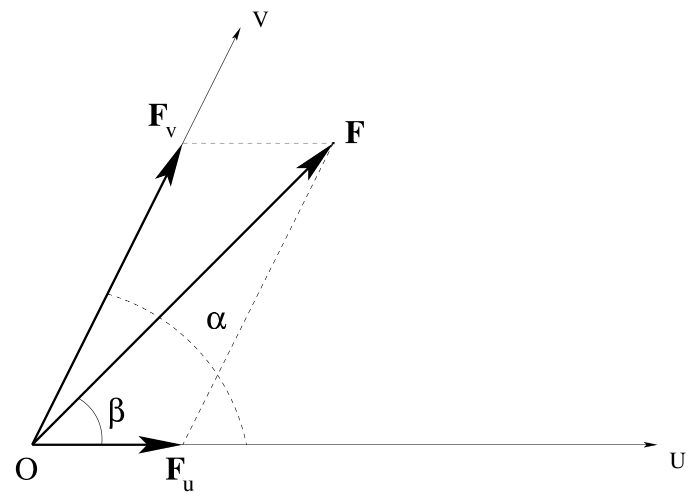
Consideriamo il triangolo OBC. Con semplici considerazioni geometriche si prova che $\widehat{OBC} = 180^0 - \alpha$, $\widehat{OCB} = \alpha - \beta$.



Se a, b sono le lunghezze incognite dei due vettori A, B, per il teorema dei seni (e tenendo conto che $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$) si ha:

$$\frac{c}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Questa eguaglianza vale anche se $\beta > \alpha$ e anche in caso di angoli maggiori di 180^0. Un valore negativo per a o per b indica che il vettore ha il verso negativo nel sistema di riferimento considerato e la sua lunghezza è il valore assoluto della quantità trovata.



Esempio **31.**

Siano i vettori $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{F}$ *come nella figura precedente, con* $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$. *Noto il modulo* F *del vettore* $\mathbf{F}$, *determinare il valore delle sue proiezioni* F_v *e* F_u *sui vettori* $\mathbf{U}, \mathbf{V}$.

Applichiamo il *teorema dei seni*

$$F_u = F\,\frac{\sin 15^0}{\sin 60^0} = F\,0,297 \quad \text{nella direzione positiva di } u$$
$$F_v = F\,\frac{\sin 45^0}{\sin 60^0} = F\,0,816 \quad \text{nella direzione positiva di } v.$$

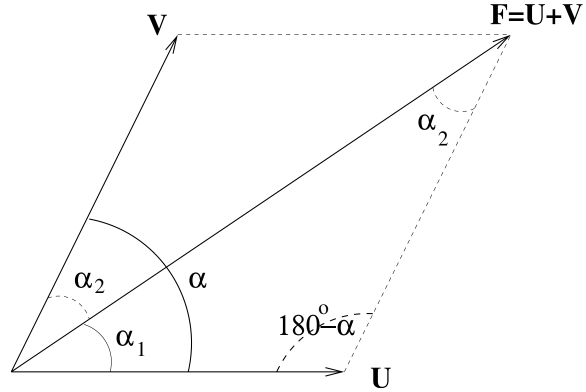
Problema **2.**

Dati due vettori $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ *di ampiezza* U, V *e formanti un angolo* α, *si vuole trovare la lunghezza* F *del vettore somma* $\mathbf{F} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$ *e gli angoli* α_1, α_2 *che questo forma con i due vettori dati (vedi figura).*

Applichiamo il **teorema dei coseni**:

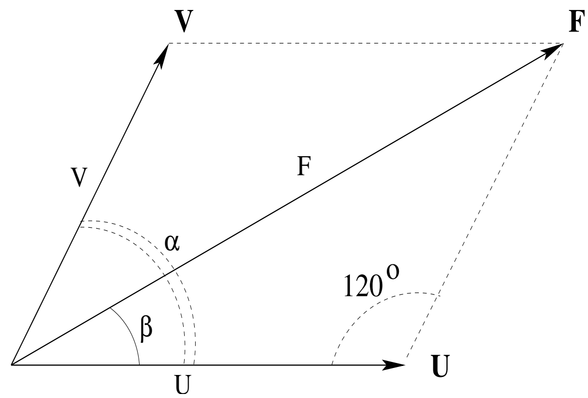
$$F^2 = U^2 + V^2 - 2UV\cos(180^0 - \alpha) = U^2 + V^2 + 2UV\cos\alpha$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{F^2 + U^2 - V^2}{2FU}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{F^2 + V^2 - U^2}{2FV}.$$



ESEMPIO **32.**

Due vettori **U**, **V**, *di lunghezza* $U = 0,42$ *e* $V = 1,33$ *rispettivamente, sono applicati ad uno stesso punto* 0 *e le loro direzioni formano un angolo di* $\alpha = 60^0$. *Trovare l'intensità* F *del vettore somma e l'angolo* β *che questo forma con* **U**, **V** *(vedi figura).*



$$F^2 = 0,42^2 + 1,33^2 - 2 \cdot 0,42 \cdot 1,33 \ \cos 120^0 = 2,503 \quad \Longrightarrow F = 1,582$$

mentre

$$\cos\beta = \frac{F^2 + U^2 - V^2}{2FU} \quad \Longrightarrow \quad \cos\beta = \frac{2,503^2 + 0,42^2 - 1,33^2}{2 \cdot 1,582 \cdot 0,42} = 0,684$$

da cui $\beta = 46^0 1' 24''$.

I problemi trattati negli esempi precedenti possono essere semplificati mediante l'introduzione di un sistema di riferimento cartesiano centrato in O (che per semplicità di trattazione supponiamo costituito da due assi ortogonali). Infatti ad ogni vettore possiamo associare in modo unico una coppia ordinata di numeri reali

$$A = (a_1, a_2).$$

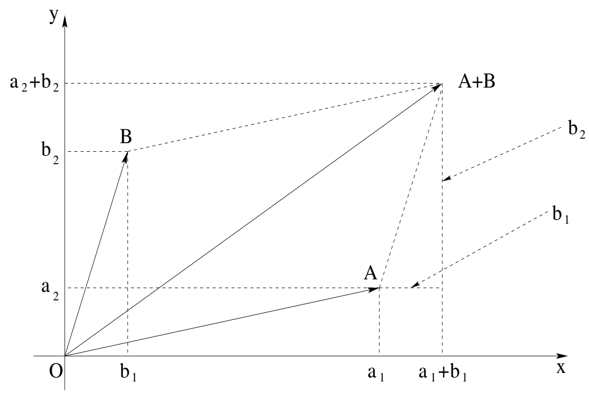
Se $E_1 = (1,0)$ e $E_2 = (0,1)$ sono i due versori degli assi cartesiani (vettori di lunghezza unitaria, aventi la direzione ed il verso degli assi) allora

$$A = a_1 \ E_1 \ + \ a_2 \ E_2$$

e dunque (a_1, a_2) sono le due componenti del vettore dato. L'introduzione del riferimento cartesiano permette di riscrivere in forma algebrica le operazioni tra vettori $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$. Si può dimostrare che è

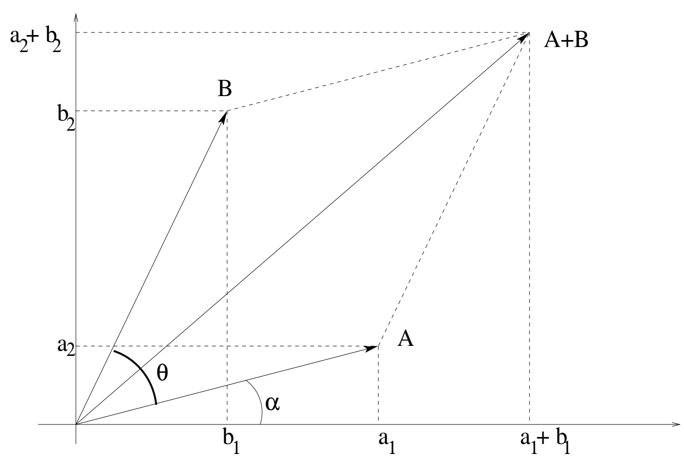
1. $A + B = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
2. $cA = (ca_1, ca_2)$
3. $A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

La verifica delle identità **(1)** e **(2)** segue da considerazioni di geometria elementare (vedi figura sotto).



La formula del prodotto scalare **(3)** si dimostra considerando le relazioni seguenti (che si deducono dalla figura riportata sotto):

$$\begin{cases} a_1 = \|A\| \cos\alpha \\ a_2 = \|A\| \sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = \|B\| \cos(\theta+\alpha) \\ b_2 = \|B\| \sin(\theta+\alpha) \end{cases}$$



Infatti utilizzando la *formula di addizione del coseno*

$$\begin{aligned} A \cdot B &= a_1 b_1 + a_2 b_2 = \\ &= \|A\| \, \|B\| \, [\cos\alpha \cos(\theta+\alpha) + \sin\alpha \sin(\theta+\alpha)] = \\ &= \|A\| \, \|B\| \, [\cos(\theta + \alpha - \alpha)] = \\ &= \|A\| \, \|B\| \, \cos\theta. \end{aligned}$$

L'introduzione di un sistema di riferimento cartesiano nel piano che contiene i vettori ci permette di affrontare in modo diverso e in qualche caso di semplificare la risoluzione dei problemi relativi al calcolo vettoriale. Vediamo come ciò avviene nei casi già visti nei Problemi 1 e 2.

Problema **1**. (Metodo alternativo).

Siano date due direzioni u, v ed un vettore C; siano inoltre

- $\|C\| = c$
- *β l'angolo che C forma con u,*
- *α l'angolo formato da u e v.*

Determinare i vettori A, B, tali che

- *la direzione di A coincide con v,*
- *la direzione di B coincide con u,*
- *$A + B = C$.*

Associamo ai vettori assegnati un sistema di assi ortogonali xOy in modo che il vettore B sia posto sull'asse x. Quindi le coordinate dei vettori assegnati relative al sistema xOy sono date da
$(a_1, a_2) = (a\cos\alpha, a\sin\alpha)$, dove $a = \|A\|$;
$(b_1, b_2) = (b, 0)$, dove $b = \|B\|$
$(c_1, c_2) = (c\cos\beta, c\sin\beta)$.
Poiché (vedi figura)

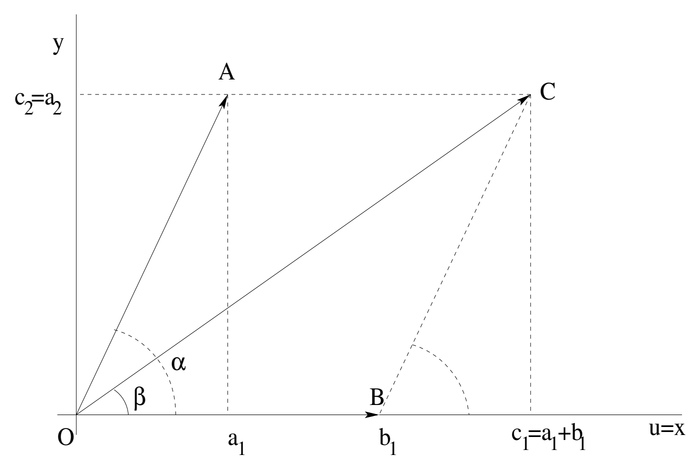
$$C = A + B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (c_1, c_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (a\cos\alpha + b, a\sin\alpha),$$

deve essere

$$\begin{cases} a\cos\alpha + b = c\cos\beta \\ a\sin\alpha = c\sin\beta \end{cases}$$

da cui

$$a = \frac{c\sin\beta}{\sin\alpha} \ \text{ e } \ b = c\cos\beta - a\cos\alpha.$$



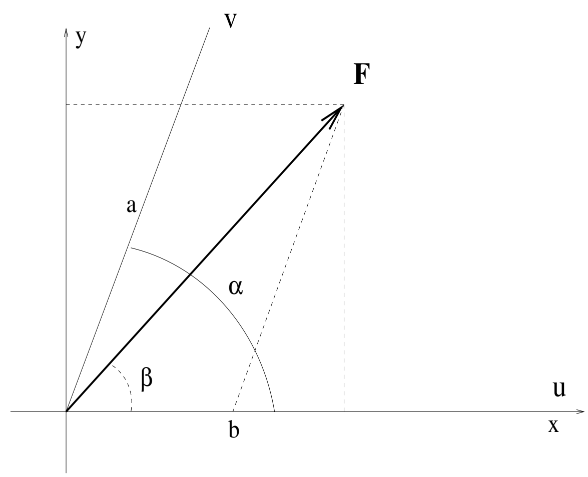
Vediamo ora come queste tecniche ci consentono di risolvere i problemi sui vettori esposti nelle pagine precedenti.

Esempio **33.**

Stessi dati dell'esempio 31. Determinare la scomposizione del vettore **F** *nelle direzioni u e v.*

Facciamo coincidere la direzione u con l'asse x, ed applichiamo le formule trovate sopra.

$$\begin{aligned} a &= F\,\frac{\sin 45^0}{\sin 60^0} = F\,0,816 \\ b &= F\,\cos 45^0 - F\,\frac{\cos 45^0}{\sin 60^0}\,\cos 60^0 = F\,0,299 \end{aligned}$$



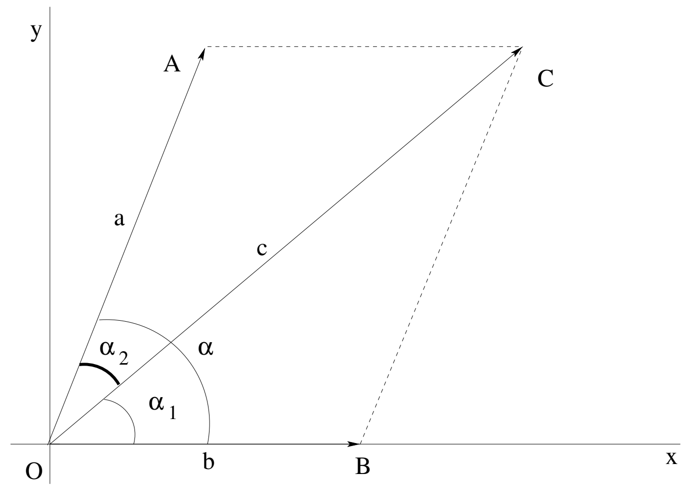
Problema **2**. (Metodo alternativo).

Dati due vettori A, B con $a = \|A\|$ e $b = \|B\|$ formanti un angolo α si determini il vettore $C = A + B$ e gli angoli α_1 e α_2 che questo forma con i due vettori dati (vedi figura).
Associamo un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore B si trovi sull'asse x. Quindi $B = (b_1, b_2) = (b, 0)$ e $A = (a_1, a_2)$= $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$, da cui, posto $C = (c_1, c_2)$, si ha $c_1 = a\cos\alpha + b$ e $c_2 = a\sin\alpha$. In particolare

$$c = \sqrt{(a\cos\alpha + b)^2 + (a\sin\alpha)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

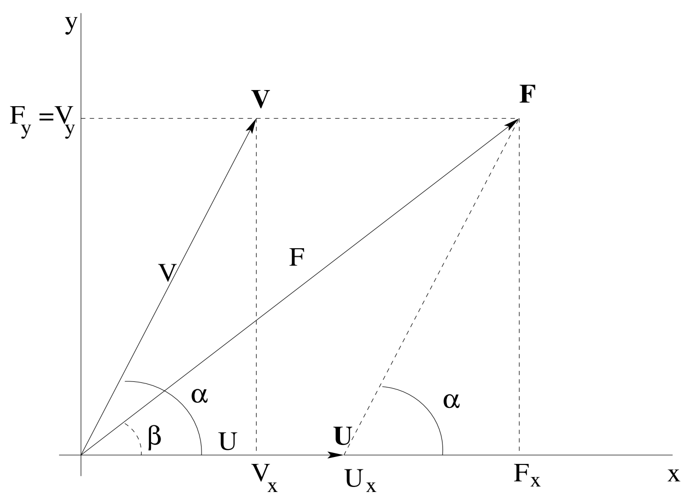
mentre da $c_2 = a_2$ e da $c_2 = c\sin\alpha_1$ otteniamo

$$\sin\alpha_1 = \frac{a\sin\alpha}{c} = \frac{a\sin\alpha}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}.$$



ESEMPIO **34.** *(Metodo alternativo per la risoluzione dell'Esempio 32).*
Due vettori **U**, **V** *di lunghezza* $U = 0,42$ *e* $V = 1,33$ *rispettivamente, sono applicati ad uno stesso punto* 0 *e le loro direzioni formano un angolo di* $\alpha = 60^0$. *Trovare l'intensità* F *e l'angolo* β *che il vettore somma forma con* **U**, **V** *(vedi figura).*

Risolviamo ora il problema associando un sistema di riferimento ortogonale xOy in modo che il vettore U si trovi sull'asse x (vedi figura).



Calcoliamo le coordinate (V_x, V_y) del punto **V**.

$$V_y = \frac{\sqrt{3}\ (1,33)}{2} = 1,1518; \quad V_x = \frac{1,33}{2} = 0,665$$

Osserviamo che $F_x = V_x + U_x = 0,665 + 0,42 = 1,085$, mentre $F_y = V_y = DH = 1,1518$.
La lunghezza del vettore **F** sarà data da

$$\|\mathbf{F}\|^2 = 1,085^2 + 1,152^2 = 2,503 \Rightarrow \|\mathbf{F}\| = 1,5823.$$

Determiniamo l'angolo β:

$$\tan\beta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1,152}{1,085} = 1,0615 \Rightarrow \beta = 46^0 1' 7''.$$