Analisi Matematica I - Corso di Laurea in Fisica

Prova scritta intermedia del 30 gennaio 2012

Risoluzione degli esercizi proposti

1) Siano n e h numeri interi, con $0 \leq h \leq n$. Dimostrare che

$$\frac{(n-h)!\,h!}{[2(n-h)]!\,(2h)!} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Svolgimento

Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ risulta, per $h = 0$

$$\frac{(1-0)!0!}{[2(1-0)]!(2\cdot 0)!} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^1};$$

mentre per $h = 1$ si ha

$$\frac{(1-1)!1!}{[2(1-1)]!(2\cdot 1)!} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^1};$$

Verifichiamo l'induttivitá della proposizione, ossia

$$\forall n, h \in \mathbb{N} \text{ con } 0 \leq h \leq n,\ \frac{(n-h)!\,h!}{[2(n-h)]!\,(2h)!} \leq \frac{1}{2^n} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \forall n, h \in \mathbb{N} \text{ con } 0 \leq h \leq n+1,\ \frac{[(n+1)-h]!\,h!}{\{2[(n+1)-h)]\}!\,(2h)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Per semplicitá dimostriamo l'induttivitá se $h \leq n$, ossia:

$$\forall n, h \in \mathbb{N} \text{ con } 0 \leq h \leq n,\ \frac{(n-h)!\,h!}{[2(n-h)]!\,(2h)!} \leq \frac{1}{2^n} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \forall n, h \in \mathbb{N} \text{ con } 0 \leq h \leq n,\ \frac{[(n+1)-h]!\,h!}{\{2[(n+1)-h)]\}!\,(2h)!} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.\boxed{1}$$

Resterá poi da verificare per $h = n+1$.

$$\frac{[(n+1)-h]!\,h!}{\{2[(n+1)-h)]\}!\,(2h)!} = \frac{(n-h)!\,h!}{[2(n-h)]!}\ \frac{n+1-h}{(2n+1-2h)(2n+2-2h)} \leq$$

(per l'ipotesi induttiva) (1)

$$\leq \frac{1}{2^n}\ \frac{n+1-h}{(2n+1-2h)\,2(n+1-h)} = \frac{1}{2^{n+1}}\ \frac{1}{2n+1-2h} < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Per provare l'induttivitá per $h = n+1$ scriviamo la diseguaglianza da provare con questo valore del parametro h:

$$\frac{(n+1)!}{[2(n+1)]!} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \qquad (2)$$

Scomponiamo il primo membro

$$\frac{(n+1)!}{[2(n+1)]!} = \frac{n!(n+1)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \frac{n!}{(2n)!}\ \frac{n+1}{(2n+1)2(n+1)}$$

(per l'ipotesi induttiva nel caso $h = 0$) (3)

$$\leq \frac{1}{2^n}\ \frac{n+1}{(2n+1)2(n+1)} = \frac{1}{2^{n+1}}\ \frac{1}{(2n+1)} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Da (2)(3) segue l'induttivitá della proposizione.

2 Determinare i numeri complessi z tali che

$$\begin{cases} |z^4+1| - |z^4 - \sqrt{3}\, i| = 0 \\ \\ |z| = 1. \end{cases}$$

Svolgimento.

Possiamo procedere in due modi: analiticamente e geometricamente.

I) Per via analitica si procede scrivendo in forma trigonometrica l'incognita: $z = \cos\theta \ + \ i \ \ \sin\theta$ e sostituendo nella prima equazione. Si osservi che scrivendo z abbiamo tenuto conto della seconda equazione del sistema, ossia del fatto che $|z| = 1$.

$$\begin{aligned}
&|z^4+1| - |z^4 - \sqrt{3}\, i| = 0 \iff |z^4+1| = |z^4 - \sqrt{3}\, i| \iff \\
&|1 + \cos 4\theta \ + \ i \ \sin 4\theta|^2 = |\cos 4\theta \ + \ i \ \sin 4\theta \ - \ \sqrt{3}\, i|^2 \iff \\
&\iff (1+\cos 4\theta)^2 + \sin^2 4\theta = \cos^2 4\theta + (\sin 4\theta - \sqrt{3})^2 \iff \\
&\iff \cos 4\theta + \sqrt{3}\ \sin 4\theta = 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

poniamo $x = \cos 4\theta$, $y = \sin 4\theta$, e teniamo conto della seconda equazione del sistema: $|z| = 1$ ci riportiamo alla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x + \sqrt{3}y = 1 \\ \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Ricavando y dalla prima equazione e sostituendo nella seconda otteniamo

$$2y^2 - \sqrt{3}y = 0 \implies y_1 = 0, \ \ y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il sistema (5) ha come soluzioni:

$$(x_1, y_1) = (1, 0), \ \ (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Tenuto conto delle posizioni fatte sopra: $(x_1, y_1) = (\cos 4\theta_1, \sin 4\theta_1)$, $(x_2, y_2) = (\cos 4\theta_2, \sin 4\theta_2)$ Quindi si deve risolvere

$$\begin{cases} \cos 4\theta_1 = 1 \\ \\ \sin 4\theta_1 = 0, \end{cases} \iff 4\theta_1 = 0 + k2\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Questo fornisce le soluzioni $\theta_{1,k} = k\frac{\pi}{2}$ con $k = 0, 1, 2, 3$. Da queste otteniamo le soluzioni

$$z_{1,0} = 1; \ \ z_{1,1} = i; \ \ z_{1,2} = -1; \ \ z_{1,3} = -i$$

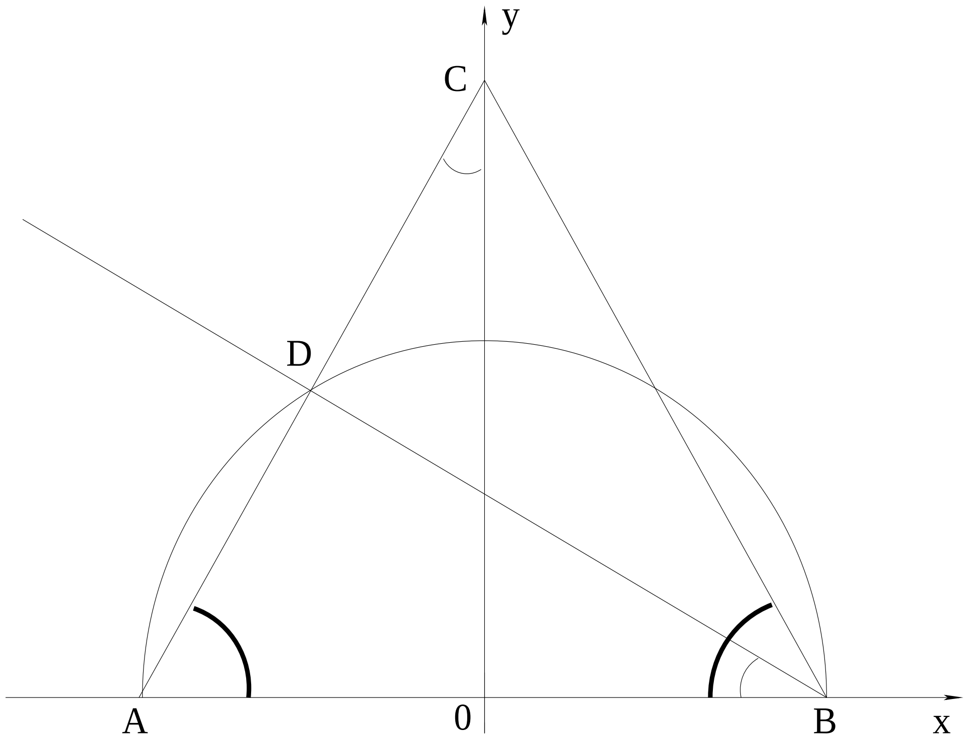
Mentre da

$$\begin{cases} \cos 4\theta_2 = -\frac{1}{2} \\ \\ \sin 4\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff 4\theta_2 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ \ k \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

seguono le altre soluzioni $\theta_{2,k} = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ con $k = 0, 1, 2, 3$ che forniscono

$$z_{2,0} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;\ z_{2,1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\ z_{2,2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;\ z_{2,3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

A questi risultati si puó arrivare per via geometrica dopo aver posto $|w| = z^4$. Quindi se $|z| = 1$ allora anche $|w| = 1$. Inoltre dalla prima equazione del sistema segue $|w + 1| = |w - \sqrt{3}i|$. Determinare i numeri complessi w che la risolvono equivale a determinare i punti del piano complesso equidistanti dai -1 e $\sqrt{3}i$. Ovvero si tratta di determinare l'asse del segmento che ha questi punti come estremi. Posto $A = (-1, 0)$ e $C = (0, \sqrt{3}\,i)$, l'asse del segmento AC interseca la circonferenza di centro O, passante per A C nel punto D. Infatti dimostriamo che il punto medio del segmento AC appartiene alla circonferenza osservando che $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$ e $AC = BC$, quindi il triangolo ABC è equilatero. Da questo si deduce che la mediana é anche altezza, ovvero il triangolo ADB è rettangolo e quindi è inscritto nella semicirconferenza, cioè D appartiene alla circonferenza. Da questo deduciamo che la sua intersezione con la circonferenza $|w| = 1$ ci dá i punti $w_1 = 1$ e $w_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ che scritti in forma trigonometrica ci riportano alle equazioni $z^4 = 1$, $z^4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. La conclusione é identica alla precedente.



3) Dimostrare che la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2} \\[2ex] a_{n+1} = \dfrac{1}{5 - 4a_n} \end{cases} \tag{8}$$

converge, e calcolarne il limite.

Svolgimento.

Verifichiamo che la successione é ben definita. In questo caso si tratta di verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$5 - 4a_n \neq 0 \iff a_n \neq \frac{5}{4}.$$

Per dimostrare questo basta provare che, per ogni $n \in$, $a_n < \frac{5}{4}$. Procediamo per induzione. Per $n = 1$ é vero. Verifichiamo l'induttivitá della proposizione, ovvero supponiamo che $a_n < \frac{5}{4}$ implica $a_{n+1} < \frac{5}{4}$. Basta scrivere

$$a_{n+1} = \frac{1}{5 - 4a_n} < \frac{5}{4} \iff \frac{1}{5 - 4a_n} < \frac{5}{4} \iff$$

$$(\text{per l'ipotesi induttiva } 5 - 4a_n > 0 \ ),$$

$$4 < 25 - 20a_n \iff a_n < \frac{21}{20} < \frac{5}{4}.$$

Vediamo se la successione é decrescente per induzione.
Primo passo: $a_2 = \frac{1}{3} < a_1 = \frac{1}{2}$.
Verifichiamo l'induttivitá della proposizione, ovvero:

$$a_{n+1} < a_n \Longrightarrow a_{n+2} < a_{n+1}.$$

Infatti

$$a_{n+2} = \frac{1}{5 - 4a_{n+1}} < \frac{1}{5 - 4a_n} = a_{n+1} \iff 5 - 4a_n < 5 - 4a_{n+1} \iff a_{n+1} < a_n$$

Osserviamo poi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$ perché, come dimostrato sopra, $\frac{5}{4} > a_n$.

La successione é dunque decrescente e limitata inferiormente, per il teorema della regolaritá delle successioni monotone, ammette limite reale L. Calcoliamo questo valore passando al limite nella relazione che definisce la successione ottenendo l'equazione:

$$L = \frac{1}{5 - 4\,L} \iff 4L^2 - 5L + 1 = 0 \iff L_{1,2} = \left\{1,\ \frac{1}{4}\right\}.$$

Il valore $L_1 = 1$ non é accettabile perché non é di accumulazione per la successione. Quindi il limite della successione é dato da $L_2 = \dfrac{1}{4}$.