Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 9 Giugno 2012

FILA 1

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera chiara e leggibile. Allegare il presente foglio allo scritto.

(1) Dimostrare la seguente diseguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2, \quad n > 1.$$

(2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{7x^2 - 2} - 3x,$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale l'identità

$$\int_0^{\pi} \sin^2(mx)\ dx = \frac{\pi}{2}$$

(4) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) - 8u'(t) + 16u(t) = (18\,t + 3)e^t, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI.

(1) Dimostrare la seguente diseguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2, \quad n > 1.$$

Svolgimento.
Dimostriamo per induzione.
Per $n = 2$ è verificata perché

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{3} - 2 \iff 6\sqrt{2} > 5.$$

Verifichiamo l'induttività della proposizione.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{n+1} >$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2} - 2.$$

La validità dell'ultimo passaggio si dimostra nel modo seguente

$$2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2} - 2 \iff 2(n+1) - 2\sqrt{(n+1)} + 1 > 2\sqrt{(n+2)(n+1)} - 2\sqrt{n+1} \iff$$

$$(2n+3)^2 > 4(n^2 + 1 + 2n) \iff 4n^2 + 12n + 9 > 4n^2 + 4 + 12n \iff 9 > 4.$$

(2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{7x^2 - 2} - 3x,$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento
Campo di esistenza.

$$7x^2 - 2 \geq 0 \iff x \leq -\sqrt{\frac{2}{7}} = x_1 \vee x \geq \sqrt{\frac{2}{7}} = x_2.$$

Limiti all'infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^2 - 2 - 9x}{\sqrt{7x^2 - 2} + 3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2 - 2}{\sqrt{7x^2 - 2} + 3x} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{7x^2 - 2} - 3x = +\infty.$$

Si osservi che in questo caso il limite non si presenta in forma indeterminata.
Asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{7 - \frac{2}{x^2}} - 3 = \sqrt{7} - 3.$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - (\sqrt{7} - 3)x = \lim_{x\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{7x^2 - 2} + 3x} = 0.$$

Quindi l'asintoto per $x \to +\infty$ è: $y = (\sqrt{7} - 3)x$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{7 - \frac{2}{x^2}} - 3 = -\sqrt{7} - 3.$$

Nel passaggio sopra abbiamo utilizzato il fatto che se $x < 0$ allora $x = -\sqrt{x^2}$.

$$q = \lim_{x\to-\infty} f(x) + (\sqrt{7} + 3)x = \lim_{x\to-\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{7x^2 - 2} - 3x} = 0.$$

Quindi l'asintoto per per $x \to -\infty$: $y = -(\sqrt{7} + 3)x$.
Studio della monotonia e dei massimi o minimi relativi mediante la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{7x}{\sqrt{7x^2 - 2}} - 3.$$

Risulta $f'(x) > 0$ per $7x > 3\sqrt{7x^2 - 2}$, ovvero

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 7x^2 - 2 \geq 0 \\ 49x^2 > 63x^2 - 18. \end{cases}$$

Da cui

$$\sqrt{\frac{2}{7}} < x < \frac{3}{\sqrt{7}} = x_3.$$

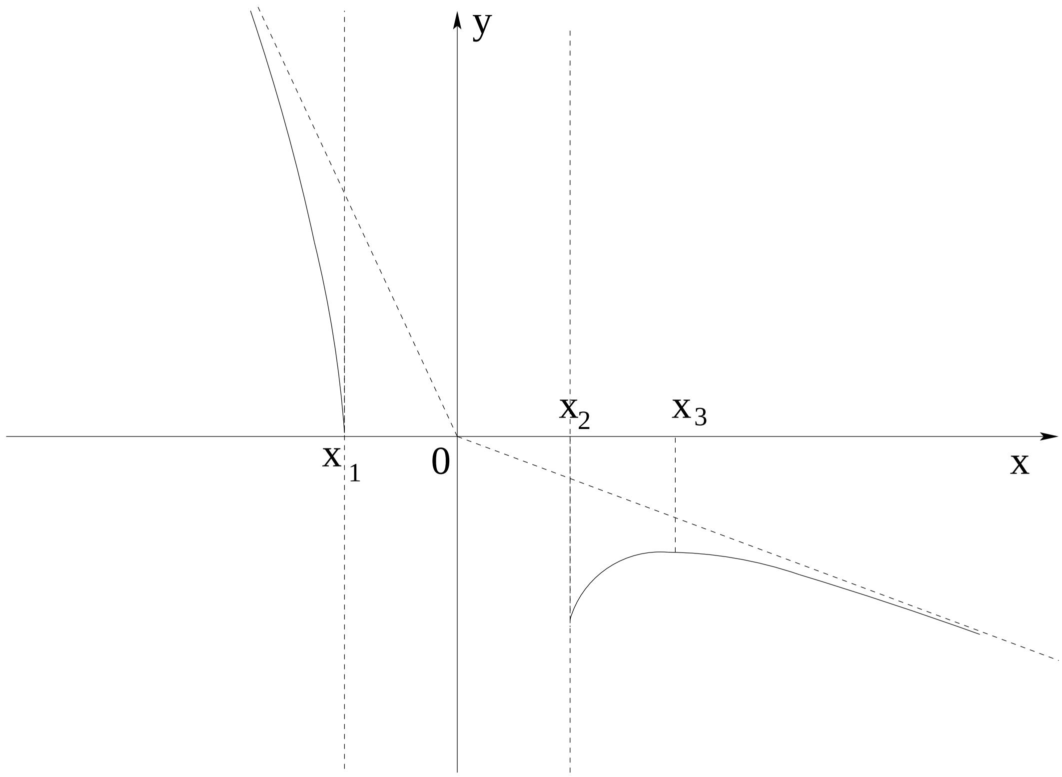
Su questo intervallo la funzione è crescente.
Inoltre la derivata prima è negativa negli intervalli

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{7}}\right) \text{ e } \left(\sqrt{\frac{2}{7}}, +\infty\right),$$

su questi intervalli la funzione è decrescente. Il punto $x = \frac{3}{\sqrt{7}}$ è di massimo relativo.
Studio della conevessità o concavità mediante la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{-14}{(7x^2 - 2)^2\sqrt{7x^2 - 2}}.$$

Risulta che per ogni $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{7}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{7}}, +\infty\right)$, la derivata seconda è negativa e quindi la funzione è convessa su ciascuna di queste semirette.



(3)
Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}\{0\}$ vale l'identità

$$\int_0^{\pi} \sin^2(mx)\ dx = \frac{\pi}{2}$$

Svolgimento.
Effettuiamo nell'integrale il seguente cambio di variabile:

$$mx = y,$$

da cui $dx = \frac{dy}{m}$. Mentre gli estremi diventano per $x = 0$, $y = 0$, e per $x = \pi$, $y = m\pi$. Di conseguenza, tenuto conto delle formule di bisezione del *seno*, possiamo scrivere

$$\int_0^{\pi} \sin^2(mx)\ dx = \frac{1}{m}\int_0^{m\pi} \sin^2 y\ dy = \frac{1}{m}\int_0^{m\pi} \frac{1-\cos 2y}{2}\ dy =$$

$$= \frac{1}{2m}[y]_0^{m\pi} - \frac{1}{2m}\int_0^{m\pi} \cos 2y\ dy = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4m}[\sin 2y]_0^{m\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

L'ultimo passaggio é giustificato dalla periodicità della funzione *seno*: $\sin 2m\pi = \sin 2\pi = 0$, per ogni $m \in \mathbb{Z}$.

(4) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) - 8u'(t) + 16u(t) = (18t+3)\, e^t, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento

Calcoliamo le radici del polinomio caratteristico associato risolvendo: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$. Questo ammette come radice $\lambda = 4$ con molteplicità 2. Lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea è quindi

$$V_0 = \{C_1\, e^{4t} + C_2\, t\, e^{4t},\ C_1,\, C_2 \in \mathbb{C}\}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo $u_f(t) = (At + B)e^t$, con $A, B \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le sue derivate, $u_f'(t) = (A + B + At)e^t$, $u_f''(t) = (2A + B + At)e^t$, e sostituiamole nell'equazione

$$(2A + B + At)e^t - 8(A + B + At)e^t + 16(At + B)e^t = (18t + 3)e^t.$$

Semplificando ed imponendo l'eguaglianza tra il polinomio al primo e quello al secondo membro otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 9A = 18 \\ \\ -6A + 9B = 3, \end{cases}$$

da cui $A = 2$, $B = \frac{5}{3}$. Lo spazio delle soluzioni dell'equazione è

$$V_f = \left\{C_1\, e^{4t} + C_2\, t\, e^{4t} + \left(2t + \frac{5}{3}\right) e^t,\ C_1,\, C_2 \in \mathbb{C}\right\}.$$

Imponiamo ora le condizioni iniziali

$$u(0) = C_1 + \frac{5}{3} = 0,\ u'(0) = 4C_1 + C_2 + 2 - 1 = 0$$

dalle quali segue il sistema

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{5}{3} = 0 \\ \\ 4C_1 + C_2 + \dfrac{11}{3} = 0, \end{cases} \iff C_1 = -\frac{5}{3},\ C_2 = 3.$$

In definitiva la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = -\frac{5}{3}\, e^{4t} + 3\, t\, e^{4t} + \left(2t + \frac{5}{3}\right) e^t.$$