Corso di Laurea in Fisica

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 17 luglio 2012

(1) Siano z e w due numeri complessi non nulli. Dimostrare che

$$Re(z/w) = 0$$

se e solo se le rette congiungenti 0 con z e 0 con w sono ortogonali.

Svolgimento

Se le rette congiungenti 0 con z e 0 con w sono ortogonali allora posto $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $w = \rho(\cos\beta + i\sin\beta)$ dalla formula del rapporto tra numeri complessi in forma trigonometrica deduciamo

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}\left[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\right] = \frac{r}{\rho}\left(\cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \pm i\frac{r}{\rho}\sin\frac{\pi}{2},$$

perché, per l'ipotesi di ortogonalità si ha $\alpha - \beta = \pm\frac{\pi}{2}$, e quindi $\cos \pm\frac{\pi}{2} = 0$.
Viceversa, dire che la parte reale del rapporto z/w è nulla equivale a dire che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{z}{w} = ic. \tag{1}$$

Partendo da questa considerazione possiamo procedere in due modi.

1) Metodo di soluzione.

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = ic \iff z\overline{w} = ic|w|^2.$$

Poniamo $z = x + iy$, $w = a + ib$ e sostiuiamo

$$z\overline{w} = ic|w|^2 \iff (x+iy)(a-ib) = ic|w|^2 \iff (xa+yb) + i(ya-xb) = ic|w|^2.$$

Il termine al secondo membro dell'eguaglianza ha parte reale nulla quindi la parte reale del numero complesso al primo membro è nulla, ovvero $xa + yb = 0$. Poiché l'espressione $xa + yb$ che rappresenta il prodotto scalare tra i vettori del piano di componenti (x, y) e (a, b) è nulla significa che questi sono tra loro ortogonali.

2) Metodo di soluzione.
Utilizzando la forma trigonometrica: $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $w = \rho(\cos\beta + i\sin\beta)$, (1) si scrive come segue

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}\left[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\right] = c\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \iff \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}.$$

(2) Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,2^k \;<\; 4^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

Svolgimento

Poiché per ogni $n \leq 1$

$$1 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

basta provare che

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,2^k \;<\; 4^n.\;\;(n=1,2,3,\cdots)$$

Per $n=1$ è ovvia. L'induttività segue dall'osservare che

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,2^k \;<\; 4^n+(n+1)2^n<4^{n+1},$$

perché

$$,4^n+(n+1)2^n<4^{n+1}\iff(n+1)2^n<3\cdot4^n,$$

che si verifica facilmente per induzione.
Altrimenti, si procede come segue.
Per $n=1$ è ovvia. Dimostriamo l'induttività della proposizione.

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,2^k=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,2^k+(n+1)\,2^n\le$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$\le4^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+(n+1)2^n.$$

Otterremo la tesi provando

$$4^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+(n+1)2^n\le4^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Ovvero

$$2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+(n+1)\le2^{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=2\cdot2^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Questa diseguaglianza è vera perché valgono le seguenti

$$2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le2^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\tag{2}$$

$$n+1\le2\cdot2^n\le2^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\tag{3}$$

La (2) è vera perché la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è monotona crescente, mentre la (3) perché risulta $2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
Resta da provare che

$$n+1\le2^{n+1}.$$

Proviamo anche questa per induzione. Per $n=1$ è ovvia. Per quanto riguarda l'induttività si ha, banalmente, che

$$2^{n+1}=2\cdot2^n\ge2n\ge n+1,$$

che è vera

(3) Al variare di $\alpha>0$, studiare il comportamento per $n\to+\infty$ della successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases}a_0=\alpha\\[2ex] a_{n+1}=4a_n^3+3a_n^2\end{cases}$$

Svolgimento

Osserviamo che se $\alpha > 0$ allora tutti i termini della successione sono positivi (banale procedimento per induzione).
Dimostriamo la monotonia induzione. Risulta $a_0 < a_1$, ossia $\alpha < 4\alpha^3 + 3\alpha^2$ per $\alpha > \frac{1}{4}$. Inoltre si ha che da $a_n < a_{n+1}$ segue $a_{n+1} < a_{n+2}$ perché dato che $0 < a_n < a_{n+1}$ allora $a_n^3 < a_{n+1}^3$ e $a_n^2 < a_{n+1}^2$.
La successione è quindi monotona crescente per $\alpha > \frac{1}{4}$.
Procedendo con analogo ragionamento si stabilisce che è monotona decrescente per $0 < \alpha < \frac{1}{4}$.
Sia quindi $0 < \alpha < \frac{1}{4}$, la successione limitata inferiormente da zero e decrescente, per il teorema di regolarità delle succesisoni monotone, essa ammette limite L che deduciamo dalla relazione ricorsiva che definisce a_n:

$$L = 4L^3 + 3L^2.$$

Le soluzioni sono $L_1 = 0$, $L_2 = \frac{1}{4}$, $L_3 = -1$.
I valori -1 e $\frac{1}{4}$ si scartano perché non sono punti di accumulazione per la successione e quindi nel caso $1 < \alpha < \frac{1}{4}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Se $\alpha = \frac{1}{4}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{4}.$$

perché in questo caso la successione è costantemente uguale a $\frac{1}{4}$.
Sia $\alpha > \frac{1}{4}$. Dato che a_n è crescente, anche in questo caso il teorema di regolarità delle successioni monotone assicura l'esistenza del limite, ma nessuno dei possibili limiti, L_1, L_2, L_3 è punto di accumulazione per la successione, il limite può essere solo $+\infty$.