1. Trovare il campo di esistenza , gli zeri e il segno delle seguenti funzioni e riportare i risultati nel piano cartesiano:

1. $\log(1-x^2-y^2)$ 2. $\dfrac{\sqrt{x-1-y^2}}{\log(x-y^2)}$ 3. $\sqrt{1-e^{xy}}$

4. $\log(1-x^2)+\log(1-y^2)$ 5. $\sqrt{y^2-x^4}$

6. $\text{arcsen}\,\dfrac{x+y-1}{x-y+1}$ 7. $\log\dfrac{x-y+2}{x^2-y}$ 8.

2. Calcolare (se esiste) il limite per (x, y) → (0 , 0) delle seguenti funzioni:

1. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ 2. $\dfrac{3x^3+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}$ 3. $\dfrac{\text{sen}(x^2-y)}{x^2+y^2}$

4. $\dfrac{x^3-2xy+y^3}{x^2+y^2}$ 5. $\dfrac{1-\cos(xy)}{x^4+y^4}$ 6. $\dfrac{x^3y^2}{x^6+y^2}$

7. $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}\,\text{sen}\,\dfrac{1}{xy}$ 8. $\dfrac{\log(1+x^2)}{(x^2+y^2)^{4/5}}$ 9. $y^2\text{arctg}\,\dfrac{1}{xy}$

3. Calcolare (se esiste) il limite per (x, y) → ∞ delle seguenti funzioni:

1. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 2. $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 3. $\dfrac{(x-y)^4}{x^2+y^2}$

4. Dire se è possibile estendere per continuità a tutto R^2 le seguenti funzioni:

1. $\dfrac{\operatorname{sen}(2x - 2y)}{x - y}$ 2. $\dfrac{e^{x+y} - 1}{3x + 3y}$ 3. $\left(\dfrac{1 + x^2 + y^2}{y}\right)^y$

5.

Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 y / (x^2 + y^2) & \operatorname{se}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \operatorname{se}(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

verificare che nel punto (0,0) le derivate seconde miste non sono uguali. Spiegare perché non vale il teorema di Schwarz.

6.

Verificare che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \cos\dfrac{1}{y} & \operatorname{se} y \neq 0 \\ 0 & \operatorname{se} y = 0 \end{cases}$$

è differenziabile nel punto (0 , 0) anche se non valgono le ipotesi del teorema del differenziale totale.

7.

Verificare che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 y(y-1) + x y^2 - y^3}{x^2 + y^2} & \operatorname{se}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \operatorname{se}(x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è differenziabile nel punto (0 , 0) e scrivere il differenziale.

8.

Determinare l'equazione del piano tangente e quella della retta normale al grafico della funzione f (x , y) nel punto indicato:

1. $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x + 2y)$ $P_0 = (1, 0)$

$P_0 = (0, 0)$

2. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-2}$ $P_0 = (1, 1)$

3. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $P_0 = (x_0, y_0)$

9.

Calcolare la derivata prima della funzione F (t) ottenuta componendo la funzione f (x , y) con la curva $\varphi(t)$:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\varphi(t) = (1+t, 1-t)$
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\varphi(t) = (\cos t, \ \mathrm{sen}\, t)$
3. $f(x,y) = \log(x^2 - y^2)$, $\varphi(t) = (\sqrt{1+t^2}, t)$

10.

Data la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$,

(i) calcolare la derivata nel punto (1,1) nella direzione della retta y = x nel verso delle x crescenti

(ii) verificare che il gradiente è perpendicolare alle sue linee di livello .

11.

Data la funzione $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$, trovare la direzione V per cui $D_V f(2,1) = 0$.