Appunti sulla sviluppabilità in serie di Taylor.

La serie di Taylor di punto iniziale x_0 per una funzione f definita in un intervallo aperto ($x_0 - r$, $x_0 + r$) di classe C^∞ (cioè, infinite volte derivabile), è la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

Se la serie converge in ($x_0 - r$, $x_0 + r$) ad f (x), la funzione si dice analitica ovvero sviluppabile in serie di Taylor.

Non tutte le funzioni di classe C^∞ sono analitiche, nel senso che non sono la somma della loro serie di Taylor. L'esempio più semplice a questo proposito è dato dalla funzione $f(x) = \exp(-1/x^2)$, prolungata per continuità con valore nullo per x = 0. In tale punto le derivate della funzione sono tutte nulle: dunque la sua serie di Taylor è quella nulla, che converge alla funzione identicamente nulla e non alla funzione f (x).

Dalla definizione del resto n-esimo $R_n(x)$ della formula di Taylor

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k ,$$

si ricava che condizione necessaria e sufficiente perché la funzione sia sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 in (a, b) è che risulti

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0 .$$

Ricordando l'espressione di Lagrange per il resto $R_n(x)$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(con ξ opportuno valore compreso tra x_0 ed x), si possono dare delle condizioni sufficienti a che ciò avvenga.

Ad esempio, possiamo richiedere che esistano M , L ≥ 0 tali che risulti

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le M L^n .$$

In particolare (per L = 1) , questo accade se le derivate sono equilimitate.

Un'applicazione di questo risultato è la sviluppabilità delle funzioni senx e cosx in R (le cui derivate sono appunto equilimitate).

Per le derivate della funzione e^x in ogni intervallo (-r , r) risulta $\left| f^{(n)}(x) \right| \le e^r$, e dunque la funzione è sviluppabile in ciascuno di questi intervalli (e di conseguenza in R).

Alcuni sviluppi in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots\dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \ x \in R$$

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots\dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots\dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in R$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots + x^n + \dots. = \sum_{n=0}^{\infty} x^n , \ x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots\dots + (-1)^n x^n + \dots. = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n , \ x \in (-1, 1)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots\dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \ x \in (-1, 1]$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots.(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n , \ x \in (-1, 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n , \ x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n , \ x \in (-1, 1)$$

$$\text{arcsen}\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} , \ x \in (-1, 1)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} , \ x \in (-1, 1)$$

$$\text{arctg}\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} , \ x \in [-1, 1]$$

PS: il semifattoriale n !! è il prodotto dei numeri pari da 2 ad n se n è pari, dei numeri dispari da 1 ad n se n è dispari.

Altri sviluppi di Taylor si possono dedurre derivando o integrando sotto segno di serie, oppure con una sostituzione (ad esempio: lo sviluppo di $e^{(-x^2)}$ si deduce da quello di e^x, se in questo si sostituisce x con ($-x^2$)).