Esercizi preliminari di matematica

1. Pochi richiami di logica

1.1 Per ciascuna delle seguenti proposizioni scrivere la negazione.

Ricordare che una proposizione contenente i connettivi logici $\forall$ (per ogni) ed $\exists$ (esiste almeno un/una … tale che …) si nega scambiando tra loro i connettivi (“per ogni” diventa “esiste almeno un/una … tale che …” e viceversa) e negando l’ultima affermazione.

(a) Tutti gli studenti del corso abitano a Pisa.
(b) Almeno uno studente del corso prenderà meno di 30 all'esame.
(c) Tutte le studentesse del corso hanno occhi celesti e capelli biondi.
(d) Tutti i docenti del dipartimento svolgono almeno un corso oppure sono all'estero per motivi di studio.
(e) $\exists\, M \in \mathbf{R} :\ \forall\, x \in A \subset \mathbf{R},\ x < M.$
(Qui **R** è l'insieme dei reali ed A un suo sottoinsieme. Che cosa significa la proposizione data ? Trovare un esempio di insieme A che la verifica ed uno che non la verifica).
(f) $\forall\, x \in A \subset \mathbf{R}\ \ \exists\, M \in \mathbf{R} : x < M.$
(come sopra).
(g) $\forall\, x', x'' \in A \subset \mathbf{R}$ con $x' \neq x''$ risulta $f(x') \neq f(x'')$.
(qui f è una funzione definita su A. Come sopra, spiegare il significato della proposizione e trovare due funzioni, una che la verifica e l'altra no).
(h) $\forall\, y \in \mathbf{R}\ \ \exists\, x \in A : f(x) = y.$
(come sopra).

1.2 Dire quali delle seguenti proposizioni sono vere:

(a) $\forall\, x \in R,\ x^2 \geq 1$ (b) $\exists\, x \in R:\ x^2 \geq 1$

(c) $\forall\, x \in R,\ x^2 \geq 0$ (d) $\exists\, x \in R:\ x^2 < 0$

(e) $\exists\, x \in R:\ x^2 \leq 0$ (f) $\forall\, x \in R,\ \exists\, y \in R:\ y^2 = x$

(g) $\forall\, x \in R,\ \exists\, y \in R:\ y^3 = x$ (h) $\exists\, x \in R:\ \forall\, y \in N,\ y \geq x$

(i) $\forall\, y \in N,\ \exists\, x \in R:\ y \geq x$ (l) $\exists\, x \in R:\ \forall\, y \in N,\ y < x$

(m) $\forall\, y \in N,\ \exists\, x \in R:\ y < x$

1.3

Ricordiamo che la scrittura $A \Rightarrow B$ (A implica B) significa che se la proposizione A è vera, allora è vera anche la proposizione B; si dice anche che A è una condizione sufficiente per B (nel senso che basta sia vera A per essere sicuri che lo è anche B) o anche che B è una condizione necessaria per A (nel senso che per sperare che A sia vera deve esserlo preliminarmente B, cioè se B non è vera non lo è nemmeno A). La scrittura $A \Leftrightarrow B$ (doppia implicazione) significa che A è vera se e solo se lo è B, cioè le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false, ovvero A è condizione necessaria e sufficiente per B.

Trasformare le seguenti affermazioni in una corretta implicazione o viceversa.

(a) Condizione sufficiente perché un numero sia multiplo di 4 è che lo sia di 20.
(b) Condizione necessaria e sufficiente perché sia $\sqrt{(x - 1)} = 1$ è $x = 2$.

(c) Condizione sufficiente (ma non necessaria) che sia $x^2 > 1$ è $x > 1$.

(d) Condizione necessaria e sufficiente che sia $x^3 > 1$ è $x > 1$.

(e) Condizione necessaria (ma non sufficiente) perché una funzione sia derivabile è che sia continua. (Per svolgere l'esercizio non occorre conoscere il significato dell'affermazione).

(f) f continua in [a, b] $\Rightarrow$ f integrabile in [a, b] (come sopra).

(g) Le rette r ed s sono parallele $\Rightarrow$ le rette r ed s non si intersecano.

(h) $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$.

(i) $x = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 2$.

1.4 Date le seguenti coppie A, B di proposizioni, dire quali delle implicazioni $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$ sono vere:

(a) A : $x (x - 1) = 0$	B : $x = 0$
(b) A : $\|x\| \leq 0$	B : $x = 0$
(c) A : $x \in P \cap Q$	B : $x \in P$
(d) A : $x + y \geq 0$	B : $x \geq 0$ e $y \geq 0$
(e) A : $\|x\| = 0$	B : $x = 0$
(f) A : $\|x\| + \|y\| = 0$	B : $x = y = 0$
(g) A : $\|x\| + \|y\| > 0$	B : $x \neq 0$, $y \neq 0$
(h) A : $x y > 0$	B : x e y hanno lo stesso segno
(i) A : $x \leq 0$	B : $\|x\| = - x$
(l) A : le rette r ed s sono parallele	B : le rette r ed s non si intersecano
(m) A : $\|x - 1\| \geq 2$	B : $x \geq 3$
(n) A : $x^2 = 4$	B : $x = 2$
(o) A : $x^2 = 4$	B : $x = 2$ oppure $x = - 2$
(p) A : $x^2 = 4$	B : $\|x\| = 2$
(q) A : $\sqrt{(x^2)} = 2$	B : $x = 2$
(r) A : $\sqrt{(x^2)} = 2$	B : $x = 2$ oppure $x = - 2$
(s) A : $\sqrt{(x^2)} = 2$	B : $\|x\| = 2$
(t) A : $\|x\| > 1$	B : $x > 1$
(u) A : $\|x\| > 1$	B : $x > 1$ oppure $x < -1$
(v) A : $\|x\| < 1$	B : $x < 1$
(w) A : $\|x\| < 1$	B : $x < 1$ oppure $x > -1$
(z) A : $\|x\| < 1$	B : $x < 1$ e $x > -1$

1.5 Dati gli insiemi A = { t, z } e B = { v, z, t }, stabilire se sono vere le seguenti relazioni:

(a) $A \in B$ (b) $A \supset B$ (c) $B \subseteq A$ (d) $v \subseteq B$

(e) $z \in B$ (f) $A \subset B$ (g) $A - B = \{ v \}$ (h) $A - B = \emptyset$

(i) $A \cup B = \{ v, t, z \}$ (1) $A \cap B = \{ z \}$.

1.6 Trovare unione e intersezione degli insiemi A e B sotto indicati.

Ricordiamo il significato di alcuni simboli riferiti a insiemi numerici: **N** indica i numeri naturali 1, 2, 3, … , **Z** gli interi … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … , **Q** i razionali cioè i rapporti della forma m/n dove m è un intero ed n un naturale, **R** i reali.

(a) $A = \{ x \in \mathbf{Q} : |x| < 3 \}$ $\qquad B = \{ x \in \mathbf{N} : x < 5 \}$

(b) $A = \{ x \in \mathbf{Z} : |x| \leq 3 \}$ $\qquad B = \{ x \in \mathbf{Z} : 2 \leq x \leq 7 \}$

(c) $A = \{ x \in \mathbf{R} : x^2 = -3 \}$ $\qquad B = \{ x \in \mathbf{R} : x^2 = 1 \}$

(d) $A = \{ x \in \mathbf{R} : |x| < 2 \}$ $\qquad B = \{ x \in \mathbf{R} : |x| \geq 1 \}$

(e) $A = \{ x \in \mathbf{R} : |x - 2| < 3 \}$ $\qquad B = \{ x \in \mathbf{R} : |-2 - 5x| > 2 \}$

1.7 Dati gli insiemi A e B , stabilire se sono uguali :

(a) $A = \{ x \in R : (x > 2 \text{ e } x < 6) \text{ o } (x < 0) \}$

$B = \{ x \in R : (x > 2) \text{ e } (x < 6 \text{ o } x < 0) \}$

(b) $A = \{ x \in R : (x > 2 \text{ e } x < 6) \text{ o } (x < 0) \}$

$B = \{ x \in R : (x > 2 \text{ o } x < 0) \text{ e } (x < 6 \text{ o } x < 0) \}$

(c) $A = \{ x \in R : (x < 1 \text{ o } x > 3) \text{ e } (x \leq 2) \}$

$B = \{ x \in R : (x < 1 \text{ o } x \leq 2) \text{ e } (x > 3 \text{ o } x \leq 2) \}$

(d) $A = \{ x \in R : (x < 1 \text{ o } x > 3) \text{ e } (x \leq 2) \}$

$B = \{ x \in R : (x < 1 \text{ e } x \leq 2) \text{ o } (x > 3 \text{ o } x \leq 2) \}$

Nel caso generale , valgono i seguenti risultati , analoghi per le proposizioni e per gli insiemi :

$(P \text{ e } Q) \text{ o } R = (P \text{ o } R) \text{ e } (Q \text{ o } R)$ $\qquad (P \text{ o } Q) \text{ e } R = (P \text{ e } R) \text{ o } (Q \text{ e } R)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ $\qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

1.8 Considerare il seguente ragionamento:

" L'equazione $\sqrt{(x-1)^2} = 1$ si semplifica nella forma $x - 1 = 1$ (elevandone al quadrato ambo i membri) *e dunque $x = 2$ ne è l'unica soluzione. "*

Il risultato a cui siamo arrivati è falso: $x = 2$ è una soluzione (come si verifica direttamente) , ma non è l'unica, dato che anche $x = 0$ lo è (ed anche in questo caso la verifica è immediata). Trovare dove è sbagliato il ragionamento precedente e come va modificato per arrivare ad una corretta risoluzione dell'equazione.

1.9 Considerare il seguente ragionamento:

" La disequazione $\sqrt{(x-1)^2}$ *> si semplifica nella forma* $x^2 - 1 > x^2$*, cioè* $-1 > 0$ *; poiché quest'ultima relazione è ovviamente falsa, deduciamo che la disequazione di partenza non ha soluzioni. "*

Il risultato a cui siamo arrivati è certamente falso, ad esempio x = -1 è una soluzione della disequazione. Trovare dove è sbagliato il ragionamento precedente e come va modificato per arrivare ad una corretta risoluzione della disequazione.

1.10 Provare le seguenti proposizioni, utilizzando il principio di induzione:

(a) $(1+a)^n \geq 1+na \quad (a>-1)$

(b) $2^n > n^2 \quad (\forall n \geq 5)$

(c) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad (a \neq 1)$

(d) $3^{2n} - 2^n$ è multiplo di 7

(e) $3^n \geq n\,2^n$

(f) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1.11 Dire (naturalmente senza servirsi della calcolatrice) quali tra le seguenti disuguaglianze sono vere . (Questo in realtà non è propriamente un esercizio di logica).

(a) $\frac{2}{3} < \frac{3}{2}$

(b) $-\frac{1}{5} < -\frac{2}{3}$

(c) $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{4}$

(d) $\dfrac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} \geq 1$

(e) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} < 1$

(f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} > 3$

2. Equazioni e disequazioni di primo o secondo grado; valore assoluto.

2.1 Risolvere le seguenti equazioni o disequazioni:

(a) $2x+1 \geq 2-x$

(b) $3/x \leq 3$

(c) $\frac{2x+3}{x-1} \leq 0$

(d) $\frac{1}{2x-1} - 4 < \frac{1}{2x-2}$

(e) $6x^2 + 5x + 1 \leq 0$

(f) $2x^2 - 3x + 9/8 > 0$

(g) $x^2 + x + \sqrt{2} < 0$ (h) $\dfrac{x^2 - 7x}{1 - x^2} \geq 0$

(i) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{1 - x^2} \leq \dfrac{1}{1 + x}$ (l) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

(m) $x^4 - 3x^2 - 4 \geq 0$ (n) $|x - 1| + |2x + 1| = 10$

(o) $|x - 1| < |x + 1|$ (p) $|x - 1| > |x^2 - x|$

(q) $|x + 3| > 2$ (r) $|x^2 - 7x + 12| \leq x + 12$

(s) $|x^2 - 3x| \leq 1$ (t) $||x - 1| - |2 - x|| > 3$

(u) $\left|\dfrac{x}{x + 1}\right| \leq 1$ (v) $\dfrac{x}{x + 1} + \dfrac{1}{|x|} \leq -1$

(w) $x + 2y + z = 1,\ x - z = 2,\ x + y - z = 0$ (sistema)

(z) $x + y + 2z = 1,\ x - y + z = -3,\ x + 3y + 3z = 5$ (sistema)

2.2 Trovare per quali valori dei coefficienti a, b, c la disequazione $a x^2 + b x + c > 0$ ha come insieme di soluzioni:

(a) **R** (b) $(-2, 3)$ (c) $\varnothing$ (d) $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$

3. <u>Radici</u>

3.1 Ridurre allo stesso indice i seguenti radicali, eventualmente dopo aver specificato sotto quali condizioni sono definiti :

(a) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[10]{5}$

(c) $\sqrt{a}$, $\sqrt[12]{a^5}$, $\sqrt[4]{a^3}$ (d) $\sqrt[3]{x - y}$, $\sqrt[5]{x + y}$, $\sqrt{x^2 - y^2}$

3.2 Trovare per quali valori di x hanno senso le seguenti espressioni:

(a) $\sqrt{1 - x^2}$ (b) $\sqrt{|x^2 - 1|}$

(c) $\sqrt[3]{x^2 - 4}$ (d) $\sqrt{-x}$

(e) $\sqrt{-x(5-x)}$ (f) $\sqrt{x^2(1-x)}$

3.3 Poste le condizioni di esistenza, semplificare le seguenti espressioni.
Ricordare che per n pari risulta $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, mentre per n dispari $\sqrt[n]{a^n} = a$.

(a) $\sqrt{\dfrac{25x^2}{y^4}}$ (b) $\sqrt{\dfrac{4(x-1)^2}{y^2}}$

(c) $\sqrt{\dfrac{(x-1)^4}{y^4}}$ (d) $\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{(x-1)^6}}$

(e) $\sqrt[20]{\dfrac{(x-1)^5}{x^{10}}}$ (f) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{x-1}}\right)^2$

(g) $\left(\sqrt[4]{x^2 y}\right)^6$ (h) $\left(x^{1/2}\right)^{2/3}$

(i) $\left((2x-1)^{1/3}\right)^{1/2}$ (l) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\dfrac{5}{x}}}$

(m) $\sqrt{x^2(x-1)}$ (n) $\sqrt{x(x-1)^2}$

(o) $\sqrt[4]{x^5+3x^4}$ (p) $\sqrt{(x^2-1)(x+1)}$

(q) $\sqrt{\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2}}$

3.4 Poste le condizioni di esistenza, calcolare ed eventualmente semplificare le seguenti espressioni , facendo cioè comparire un’unica radice.

(a) $\sqrt{x}\ \sqrt{x+1}$ (b) $\sqrt{3-x}\ \sqrt{3+x}$

(c) $\sqrt[3]{x(x+2)}\ \sqrt[3]{x^2}$ (d) $\sqrt{x}\ \sqrt[3]{x^2}$

(e) $\sqrt{3x-4}\ \sqrt[3]{x^2}$ (f) $x\sqrt[3]{x^2}$

(g) $(3x-1)\sqrt{x}$ (h) $\sqrt{x} \;/\; \sqrt{x(x+1)}$

(i) $\sqrt[4]{3x} \;/\; \sqrt[4]{9(x+2)}$ (l) $\sqrt{1+\frac{3}{x}} \;/\; \sqrt{3+x}$

3.5 Dire per quali valori di x sono vere le seguenti uguaglianze

(a) $\sqrt{x^2} = x$ (b) $\sqrt{x^2} = -x$

(c) $\sqrt{x^2} = |x|$ (d) $\sqrt{x^2(x+1)} = x\sqrt{x+1}$

(e) $\sqrt{x^2(x+1)} = -x\sqrt{x+1}$ (f) $\sqrt{x^2(x+1)} = |x|\sqrt{x+1}$

(g) $\sqrt[3]{(x+1)^3} = x+1$ (h) $\sqrt[3]{(x+1)^3} = |x+1|$

(i) $\sqrt[4]{(x^4-7x+10)^4} = (x-2)(x-5)$ (l) $\sqrt{(x^2-x)^2} = -x(x-1)$

(m) $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x}$ (n) $\sqrt[3]{x^2-4} = \sqrt[3]{|x-2|}\,\sqrt[3]{|x+2|}$

(o) $\sqrt[3]{x^2-4} = \sqrt[3]{x-2}\,\sqrt[3]{x+2}$ (p) $\sqrt{x^2-x^4} = |x|\sqrt{1-x^2}$

(q) $\sqrt{x^2-x^4} = -x\sqrt{1-x^2}$ (r) $\sqrt{x^2-x^4} = -x\sqrt{x^2-1}$

(s) $\left[(1+x^2)^{2/3}\right]^{3/4} = \sqrt{1+x^2}$ (t) $\left[(1+x)^{2/3}\right]^{3/4} = \sqrt{1+x}$

3.6 Semplificare le seguenti espressioni , dopo aver precisato per quali valori sono definite:

(a) $\dfrac{\sqrt{x^2-x^4}}{\sqrt[3]{x^4-x^3}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{x^2-x^4}}{\sqrt{x^4-x^3}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{x^2-x^4}}{\sqrt{x^3-x^4}}$

3.7 Risolvere:

(a) $3x = 2\sqrt{3x-1}$ (b) $\sqrt{x-3} \geq \sqrt{2x-1}$

(c) $\sqrt{3x+2} < x$ (d) $5x-1 = \sqrt{|10x+6|}$

(e) $\sqrt{x+3} > |x|$

(f) $\sqrt{3x-2} > x-2$

(g) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}} > 1$

(h) $\sqrt{\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|} > 1$

(i) $\begin{cases} x + \sqrt{1 + 2x - 3x^2} > 1 \\ x + \sqrt{x+1} \geq 2 \end{cases}$

(l) $\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{x} > 2 / \sqrt{x+3} \\ |x^2 - 8x + 10| > 3 \end{cases}$

(m) $\sqrt[3]{1+3x} \geq \sqrt{1-3x}$

(n) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} > \sqrt{x+5}$

4. Esponenziali e logaritmi

4.1 Calcolare:

(a) $\log_3 27$ (b) $\log_{10} 1$ (c) $\log_2 2$

(d) $\log_4 2$ (e) $\log_9 27$ (f) $\log_3 1/9$

(g) $\log_{1/2} 4$ (h) $\log_9 3$ (i) $\log_2 4$

(l) $\log_{3/5} \sqrt{5/3}$ (m) $\log_{-1/2} 2$ (n) $\log_2 (-1/2)$

4.2 Ricordando la formula di cambiamento di base in un logaritmo

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad ,$$

trasformare i seguenti logaritmi in logaritmi naturali (cioè aventi come base il numero di Nepero e. Come base di un logaritmo può essere scelto un qualunque numero reale $a > 0$, $a \neq 1$; solo quando si sceglie il numero di Nepero, nel relativo logaritmo si può tralasciare l'indicazione della base e scrivere log (o ln) in luogo di $\log_e$)

(a) $\log_2 4$

(b) $\log_{10} e$

(c) $\log_{1/2} 4$

(d) $\log_x 2$

(e) $\log_x x$

(f) $\log_{x^2} x$

4.3 Trovare per quali valori di x hanno senso le seguenti espressioni:

(a) $\log_2 (x+1)$

(b) $\log_{10} |x+1|$

(c) $\log(-x)$

(d) $\log_x 2$

(e) $\log(\log x + 1)$ (f) $\sqrt{1 - \log(x - 1)}$

(g) $\log_x x$ (h) $\log \log \log x$

(i) $\log\ 3x(5 - x)^2$ (l) $\log((x-1)/(x+2))$

(m) $\log_5(3|x| - x^2 - 7)$ (n) $\log(2x^4 - |x|)$

4.4 Semplificare ove possibile le seguenti espressioni, utilizzando opportunamente le proprietà dei logaritmi:

(a) $\log(x^2)$ (b) $\log(4x^2)$

(c) $\log(x^3)$ (d) $\log(e/x)$

(e) $\log_2(2^x)$ (f) $\log(x(x-1)^2)$

(g) $\log\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|$ (h) $\log(x^2) - 3\log(x)$.

(i) $\dfrac{\log(x+1)}{\log(x-1)}$ (l) $\log(x+1)\log(x-1)$

(m) $\log^2 x$ (n) $\log\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

4.5 Semplificare le seguenti espressioni, utilizzando le proprietà degli esponenziali :

(a) $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right]^2$ (b) $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}}$

(c) $\dfrac{3^{2x+1} + 3^{2x} - 1}{2(3^x) + 1}$ (d) $\dfrac{9^{x^2} - (3^x)^2}{3^{x^2-1} + 3^{x-1}}$

(e) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ (f) $\dfrac{1}{2}\,2^x$

4.6 Risolvere :

(a) $\log_3 x = 3$ (b) $\log_2 x + \log_4 x = 3$

(c) $\log_3 x = \log_3 2 - \log_3(x+1)$ (d) $\log x = -5$

(e) $\log_2 (3 - x) = 2 \log_2 (5 - x) - 1$ (f) $\log | x | = -3$

(g) $\log_x 2 = 3$ (h) $\log_x (9 - 8x - x^2) \geq 0$

(i) $\log_{x^2} 2x = 3$ (l) $\log_{1/3} x^2 = -2$

(m) $\log_2 \log_{1/2} x = \log_{1/2} \log_2 x$ (n) $\log_{10} | x + 1 | + \log_{10} | x - 3 | < 1$

(o) $\log \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right) > 0$ (p) $\log_2 \dfrac{x+1}{x-1} < \log_{1/2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$

(q) $\log x \geq -1$ (r) $\log_{1/2} (x - 1) \leq \log_2 x$

(s) $\log_4 (\log_3 (x^2 - 5) < 0$ (t) $\log_3 (\log_4 (x^2 - 5) < 0$

4.7 Risolvere :

(a) $10^x = 100$ (b) $7^x = 1$

(c) $7^x = 2$ (d) $4^x = 2 \cdot 3^x$

(e) $10^x = 3^{x+1}$ (f) $\left(\dfrac{1}{2} \right)^{x^2 + 3} > \left(\dfrac{1}{4} \right)^{2x}$

(g) $3^{x+1} > 5^{1-x}$ (h) $\left(\dfrac{3}{4} \right)^{1 - 5x} \geq 2$

(i) $\left| 2^{x-1} \right| < 2$ (l) $e^{1/|x-1|} \geq 5$

(m) $\dfrac{1}{4^{x+1}} + \dfrac{2}{2^x} < 16$ (n) $| e^x - 5 | \geq 1$

(o) $3^{\sqrt{(x+1)}} \geq 5^x$ (p) $4^{2x} - 4^{x + ½} + 1 \leq 0$

5. Trigonometria

5.1 Trasformare da gradi in radianti (con il valore dei radianti compreso tra 0 e 2π) o viceversa (con il valore dei gradi compreso tra 0 e 360).
Ricordare che il legame tra misura g in gradi e misura r in radianti è dato da $g / 180 = r / \pi$.

(a) 180^0 (b) 60^0 (c) $- 45^0$

(d) 105^0 (e) 375^0 (f) $- 105^0$ (g) $- 75^0$

(h) $-\pi/6$ (i) $7\pi/2$ (l) $3\pi/4$

(m) $\pi/12$ (n) $-\pi/3$ (o) $\pi/24$ (p) $-\pi/5$

5.2 Conoscendo seno , coseno e tangente di x , scrivere il valore delle stesse funzioni per

(a) $-x$ (b) $x+\pi$ (c) $x-\pi/2$

(d) $x+\pi/2$ (e) $\pi/2-x$ (f) $2x$.

5.3 Trovare il periodo delle seguenti funzioni trigonometriche . (Ricordare che il periodo di una funzione periodica f (x) è il più piccolo numero strettamente positivo T tale che f (x + T) = f (x)) .

(a) $\cos(x-2)$ (b) $\operatorname{sen}(3x-\pi/8)$

(c) $5\cos(\pi x/4-2)$ (d) $2\operatorname{tg}(3x)$

(e) $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 3x$ (f) $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} \pi x$

(g) $\operatorname{sen} 6x+\cos 3x$ (h) $\cos x \ \operatorname{sen} x/2$.

5.4 Risolvere

(a) $\operatorname{sen} x = 1/2$ (b) $\cos 2x = -\sqrt{3}/2$

(c) $|\operatorname{tg} x| = 1$ (d) $\operatorname{sen}(x-\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

(e) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 3x = 1$ (f) $2\operatorname{sen} 2x+3=0$

(g) $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$ (h) $\cos 2x > \sqrt{3}/2$

(i) $|\operatorname{tg} x| \le 1$ (j) $0 \le \operatorname{sen}(x-\pi/4) \le 1/\sqrt{2}$

(k) $\operatorname{sen}x+\cos 2x = 1$ (l) $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \ge \sqrt{3}$

(m) $\operatorname{sen} x+\cos x = 1+\operatorname{sen} 2x$ (n) $\operatorname{sen} x > \cos x$

(o) $3\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

(p) $\cos x+\operatorname{tg} x > 1/\cos x$ (q) $\sqrt{1-\operatorname{sen} x} < \sqrt{2}\ \operatorname{sen} x$

(r) $\operatorname{sen} x\cos^2 x - \sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x\cos x = 0$

$$(s)\quad (3+\sqrt{3})\,\mathrm{sen}^2 x + 2\cos^2 x + (\sqrt{3}-1)\,\mathrm{sen}\,x\cos x = 3$$

$$(t)\quad 4\cos^2 x + 2(1-\sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} \geq 0$$

(u) $\cos x - \mathrm{sen}\,x + 1 \geq 0$

(v) $\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x - \cos x > 0$

(w) $\dfrac{\mathrm{sen}\,2x}{1-\cos 2x} > \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 x}$

(x) $\mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{2} \geq 7 - 8\cos x$

(y) $1 - \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x} > 0$

(z) $\dfrac{\mathrm{sen}\,2x + \cos 2x - 1}{\mathrm{sen}(2x - \pi/4)} \leq 0$

5.5 In un triangolo di angoli α, β, γ si ha $\beta = \pi/4$ e $\cos\alpha = -1/5$.
Trovare seno, coseno e tangente dei tre angoli.
Analogo problema, sapendo che è $\mathrm{tg}\,\alpha = 3/4$, $\cos(\beta/2) = 4/5$.

5.6 In un triangolo siano a e b le misure di due lati e γ l'angolo compreso; provare che l'area del triangolo è data da $(a\,b\,\mathrm{sen}\,\gamma)/2$.

6 Grafici elementari

6.1 Disegnare il grafico delle seguenti funzioni

Alcuni di questi grafici si riferiscono a funzioni elementari, altri possono essere dedotti da questi con qualche considerazione; ad esempio, se una funzione non cambia di segno quando sostituiamo x con - x (funzione pari) il suo grafico risulta simmetrico rispetto all'asse delle y; viceversa, se cambia di segno (funzione dispari) il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Inoltre, se una funzione è periodica di periodo T - cioè se il suo valore non cambia quando si sostituisce x con x + T - possiamo limitarci a studiarla in un qualunque intervallo di ampiezza T. Ad esempio, per studiare una funzione di periodo 2π, potremmo scegliere l'intervallo $[0, 2\pi]$ oppure l'intervallo $[-\pi, \pi]$, per una funzione di periodo π l'intervallo $[0, \pi]$ oppure l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Il grafico di una funzione $|f(x)|$ coincide con quello della funzione $f(x)$ dove è $f(x) \geq 0$, ne è il simmetrico rispetto all'asse delle x dove invece è $f(x) < 0$. Il grafico di una funzione $f(x - c)$ (con $c > 0$) si ottiene traslando quello della funzione $f(x)$ parallelamente all'asse delle x di c unità verso destra ; se invece è della forma $f(x + c)$ (con $c > 0$) la traslazione è verso sinistra. Più complesso risulta il procedimento per tracciare il grafico di una funzione composta $f(g(x))$: si parte da quello della funzione $g(x)$ e poi si cerca di capire come l'intervento della funzione f lo deformi. Ad esempio , per dedurre il grafico di $\log f(x)$, si considerano solo le parti di grafico corrispondenti a punti con ordinata maggiore di 0 ; gli intervalli di monotonia si conservano , nel senso che là dove f cresce , anche log f cresce (idem per la decrescenza) ; se il grafico di $f(x)$ " va all'infinito " , anche quello del logaritmo segue questo andamento ; dove $f(x)$ vale 0 si determina un asintoto verticale per il logaritmo. Se invece dobbiamo dedurre il grafico di $1/f(x)$, dobbiamo prendere in considerazione l'intera curva , tenendo però presente che dove $f(x)$ si annulla si forma un asintoto verticale per $1/f(x)$; il segno rimane invariato ; se il grafico di f " va all'infinito " quello di $1/f$ " va a 0 " (nel senso che si avvicina arbitrariamente all'asse delle x) , e viceversa ; infine gli intervalli di monotonia (crescenza o decrescenza) si invertono ; fissi rimangono i punti in cui l'ordinata della funzione vale 1.

(1) $|x|$ (2) $2x-1$ (3) $|2x-1|$

(4) $2|x|-1$ (5) x^2-1 (6) $|x^2-1|$

(7) $2/x$ (8) $2/|x|$ (9) $2/(x-1)$

(10) $1+(2/(x-1))$ (11) $\sqrt{x}$ (12) $\sqrt{x-1}$

(13) $\sqrt{|x|}$ (14) x^3-1 (15) e^{-x}

(16) $e^{|x|}$ (17) $\sqrt[3]{x}$ (18) $\log(-x)$

(19) $\log|x|$ (20) $|\log x|$ (21) $\log_{½}(1-x)$

(22) 2 (23) x^2-4x+1 (24) $x^2-4|x|+1$

(25) $(1/2)^x$ (26) $\log_{½}|x-1|$ (27) $\log_{10} x^2$

(28) $\sqrt{(x^2)}$ (29) $|x^3-1|$ (30) $|\text{sen}\, x|$

(31) sen 2x (32) sen $|x|$ (33) $1/\text{tg}\, x$

(34) $1-\text{sen}\, x$ (35) cos 2x (36) $\text{tg}(x/2)$

(37) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$ (38) log sen x (39) $1/\log x$

(40) $\dfrac{\sqrt{5-4x}}{2}-1$ (41) $\sqrt{x^2-4x+5}$ (42) $-\sqrt{-x^2-4x+3}$

(43) $\sqrt{-x^2+4x-3}$ (44) $e^{1/\log x}$ (45) $\log_x 2$

7 Nozioni generali sulle funzioni

7.1 Trovare il campo di esistenza delle seguenti funzioni (cioè il più grande sottoinsieme dei numeri reali in cui può variare x in modo da dare significato all'espressione algebrica che definisce la funzione):

(a) $\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x-2}}$ (b) $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (c) $\sqrt{1-\log|x|}$

(d) $\left(\sqrt{1-x^2} - \log|x|\right)^x$

(e) $\sqrt{\log|\operatorname{sen} x| - \log|\cos 2x|}$

(f) $\log\left(\left|x^2-4\right| + x^2 - x\right)$

(g) $\log\left|x^2 - x - 1\right|$

7.2 Trovare gli eventuali zeri e studiare il segno delle seguenti funzioni (cioè trovare i valori di x per i quali la funzione si annulla e gli intervalli in cui è positiva - e di conseguenza quelli in cui è negativa):

(a) $\operatorname{sen} x - \cos 2x$ (b) $x^3 / (x^2 + x - 2)$ (c) $(1 + 1/x)^x$

(d) $\dfrac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{\log|x|}$ (e) $\log^2|x| - \log x^2 - 3$ (f) $\operatorname{sen} x + \cos x$

7.3 Date le funzioni f (x) e g (x), scrivere le funzioni composte $f \circ g$, $g \circ f$, precisandone il dominio di definizione :

(a) $f(x) = \log x$, $g(x) = 1/x^2$ (b) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = 1/x$

(c) $f(x) = \log x$, $g(x) = e^x$ (d) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

(e) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x > 0 \\ 2-2x & \text{se } x \le 0 \end{cases}$, $g(x) = x^2$.

7.4 Date le seguenti funzioni composte, scriverne le componenti .
(Ad es.: la funzione $\operatorname{sen}\sqrt{(x^2-1)}$ si può scrivere nella forma $(f \circ g \circ h)(x)$ se si pone $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^2 - 1$).

(a) $e^{1/\log x}$ (b) $\log^2 x^2$ (c) $\sqrt{(1 + \operatorname{sen} x)}$.

7.5 Dire quali delle seguenti funzioni sono iniettive nel dominio indicato. (Si può rispondere in vari modi diversi : usando la definizione , oppure tracciando il grafico (la funzione è iniettiva se le rette parallele lo intersecano al più in un solo punto) , oppure ancora studiando l'equazione f (x) = k al variare del parametro k (la funzione è iniettiva se l'equazione ha al più una sola soluzione nel dominio dato)) .

(a) $x + \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ (b) $x + \dfrac{1}{x}$, $x > 0$

(c) $2 + \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbf{R}$ (d) $x^3 - 2$, $x \in \mathbf{R}$

(e) $\begin{cases} x + 1 & \text{se } x > 0 \\ 2 + 2x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$

7.6 Date le seguenti funzioni definite nel dominio indicato, scrivere le funzioni inverse, precisandone il rispettivo dominio.
(Si studia l'equazione $f(x) = k$, che nel dominio indicato ha una sola soluzione ; il valore che si trova è $f^{-1}(k)$) .

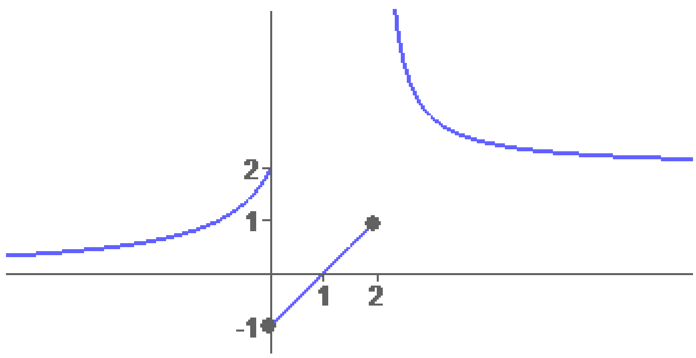
(a) $\log x^2 , x > 0$ (b) $\sqrt{x^2 - 1} , x \geq 1$ (c) $(4 - x^2)^3, \ x \leq 0$

(d) $1/(x^2 - 1) , x > 1$ (e) $e^{(x-1)/(x+1)}$ (f) $x + \sqrt{(x^2 - 1)} , x \geq 1$

7.7 Trovare la funzione di cui è grafico l'insieme

$$\Gamma = \left\{ (x, y) : -1 \leq x \leq 1 , \ y \geq 0 , \ x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

7.8 La figura seguente rappresenta il grafico di una funzione $f(x)$.
Dedurre dominio e immagine della funzione , stabilire se è iniettiva , dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = k$ al variare del parametro k , trovare l'espressione analitica di una funzione il cui grafico possa corrispondere a quello dato.
Dal grafico della funzione $f(x)$ dedurre quello delle funzioni $|f(x)|$, $f(x-1)$, $f(|x|)$, $\log f(x)$, $1/f(x)$.



8 Polinomi

8.1 Trovare quoziente e resto nella divisione del polinomio P con il polinomio Q:

(a) $P(x) = x^4 - 2x^2 + x - 1$ $Q(x) = x^2 - 1$

(b) $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 1$ $\qquad$ $Q(x) = x^2 + 1$

8.2 Scomporre i seguenti polinomi nel prodotto di polinomi di primo grado o di secondo grado a discriminante negativo (la condizione $\Delta < 0$ assicura che il polinomio non ha radici reali)

(a) $x^4 - 1$ $\qquad$ (b) $x^3 - 1$

(c) $x^3 - 7x + 6$ $\qquad$ (d) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

9 Brevi richiami di geometria analitica del piano

9.1 Scrivere le equazioni delle rette su cui si trovano i lati del triangolo di vertici $A = (2, 0)$, $B = (0, 4)$, $C = (-6, 5)$; utilizzando un sistema di disequazioni, descrivere il triangolo.

9.2 Date le rette r': $4x + y - 8 = 0$ e r'': $6x - 4y + 4 = 0$ ed il punto $P = (2, 1)$, determinare:

(a) la retta per P parallela ad r',

(b) la retta per P perpendicolare ad r'',

(c) l'insieme $r' \cap r''$,

(d) la distanza di P da r'.

9.3 Disegnare il luogo dei punti del piano che verificano le equazioni:

(a) $x^2 - 2x + y^2 = 0$ $\qquad$ (b) $x^2 - 2y^2 = 1$ $\qquad$ (c) $x^2 + 2y^2 = 1$

(d) $x^2 - 2y^2 = 0$ $\qquad$ (e) $x^2 + 2y^2 = -1$ $\qquad$ (f) $x^2 + 2y = 0$

(g) $x^2 - 2x - y = 0$ $\qquad$ (h) $x^2 + 2y^2 = 0$.

9.4 Trovare la distanza tra i punti $A = (1, 2)$, $B = (-2, 3)$.

9.5 Disegnare le rette di equazione $y = 5 - 3x$, $3x - 4y - 9 = 0$, $x = -2$, $y = 1$.

9.6 Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C = (-1, 2)$ e raggio $r = 1$.

9.7 Data l'equazione $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$, provare che è quella di una circonferenza, di cui si chiede di scrivere il centro e il raggio.