Soluzioni [1]

1. a

per $t \to 0$ $\quad |f(t)| \sim \dfrac{|\lg t|}{\sqrt[3]{t}} < \dfrac{1}{t^{\alpha+\frac{1}{3}}}$ $\quad$ scegliamo $\alpha > 0$: $\alpha + \frac{1}{3} < 1$ (cioè $0 < \alpha < 2/3$) in modo da ottenere l'integrabilità per confronto

per $t \to 1$ $\quad f(t) \sim \dfrac{(t-1)}{(t-1)^{1/3}} \to 0$ $\quad$ disc. eliminabile; l'integrale esiste

per $t \to +\infty$ $\quad f(t) \sim \dfrac{\lg t}{t^{2/3}} > \dfrac{1}{t^{2/3}}$ $\quad$ per confronto, l'integrale non esiste

1. b

C.E. $\quad x \geq 0$

SGN $\quad$ $-$ $\;0\;$ $+$ (0, 1)

LIM $\quad$ per $x \to 0$ $\; F(x) \to c \in \mathbb{R}^-$

per $x \to +\infty$ $\; F(x) \to +\infty$

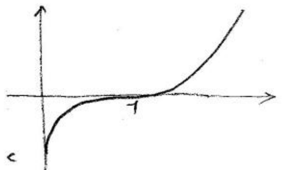
DRV $\quad F'(x) = \dfrac{\lg x}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$

$+$ (0, 1) $+$

per $x \to 0$ $\quad F'(x) \to +\infty$

per $x \to 1$ $\quad F'(x) \to 0$

per $x \to +\infty$ $\quad F'(x) \to 0$ $\quad$ non ci sono asintoti all'∞



2. $\quad 4x^2 - 4x - 3 = (2x-1)^2 - 4$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-(2x-1)^2}}\,dx \underset{\substack{2x-1 = 2\,\mathrm{sen}\,t \\ dx = \cos t\,dt}}{=} \int \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)dt = \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}\cos t + c$$

$$= \frac{3}{4}\arcsen\frac{2x-1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2} + c$$

3.

$$S_n = e - e^{1/2} + e^{1/2} - e^{1/3} + e^{1/3} - e^{1/4} + \dots + e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} = e - e^{\frac{1}{n+1}} \to e - 1$$

La serie data converge ed ha per somma $e-1$.

4. Polinomio caratteristico: k^2+4

Alle radici $k = \pm 2i$ corrispondono le slz complesse $e^{\pm 2ix}$ e le slz reali $\cos 2x$, $\mathrm{sen}\,2x$.

Passando in campo complesso, per l'eq. $z'' + 4z = 2x\,e^{ix}$ si cerca una slz. particolare $\bar{z} = (Ax+B)\,e^{ix}$. Sostituendo nell'eq., si trova che deve essere $\bar{z} = \left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{9}i\right)(\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x)$; dunque $\bar{y} = \mathrm{Re}\,\bar{z} = \frac{2}{3}x\cos x + \frac{4}{9}\mathrm{sen}\,x$.

In conclusione:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2\,\mathrm{sen}\,2x + \frac{2}{3}x\cos x + \frac{4}{9}\,\mathrm{sen}\,x.$$

Imponendo le C.I., si ottiene che deve essere $c_1 = 0$, $c_2 = -5/9$:

$$y = -\frac{5}{9}\,\mathrm{sen}\,2x + \frac{2}{3}x\cos x + \frac{4}{9}\,\mathrm{sen}\,x.$$

Solutioni [2]

1a.

per $t \to 0$ $\quad |f(t)| \sim \dfrac{|\lg t|}{\sqrt[3]{t}} < \dfrac{1}{t^{\alpha+\frac{1}{3}}}$ $\quad$ scegliamo $\alpha>0$: $\alpha + \frac{1}{3} < 1$ (cioè $0<\alpha<2/3$) in modo da ottenere l'integrabilità per confronto

per $t \to 1$ $\quad f(t) \sim \dfrac{t-1}{(1-t)^{1/3}} \to 0$ $\quad$ disc. eliminabile ; l'integrale esiste

per $t \to +\infty$ $\quad |f(t)| \sim \dfrac{\lg t}{t^{2/3}} > \dfrac{1}{t^{2/3}}$ $\quad$ per confronto, l'integrale non esiste

1b.

CE. $x \geq 0$

SGN $\quad$ $0 \quad - \quad 1 \quad +$

LIM $\quad$ per $x \to 0$ $F(x) \to c \in \mathbb{R}^+$

per $x \to +\infty$ $F(x) \to -\infty$

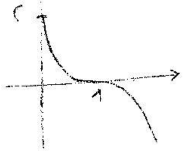
DRV $\quad F'(x) = \dfrac{\lg x}{\sqrt[3]{x(1-x)}}$

$0 \quad - \quad 1 \quad -$

per $x \to 0$ $\quad F'(x) \to -\infty$

per $x \to 1$ $\quad F'(x) \to 0$

per $x \to +\infty$ $\quad F'(x) \to 0$ non ci sono asintoti all'∞



2.

$$\int \frac{\cos x}{(2-\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen}^2 x)}\,dx \underset{\operatorname{sen} x = t}{=} \int \frac{dt}{(t-2)(t^2-1)} = \int\left(\frac{1/3}{t-2} - \frac{1/2}{t-1} + \frac{1/6}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}\lg(2-\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2}\lg(1-\operatorname{sen} x) + \frac{1}{6}\lg(1+\operatorname{sen} x) + c$$

3.

$$s_n = \frac{1}{\lg 3} - \frac{1}{\lg 2} + \frac{1}{\lg 4} - \frac{1}{\lg 3} + \dots + \frac{1}{\lg(n+1)} - \frac{1}{\lg n} = \frac{1}{\lg(n+1)} - \frac{1}{\lg 2} \to -\frac{1}{\lg 2}$$

La serie data converge ed ha per somma $-\frac{1}{\lg 2}$.

4. Polinomio caratteristico k^2+9.
Alle radici $k = \pm 3i$ corrispondono le slz. complesse $e^{\pm 3ix}$ e le slz reali $\cos 3x$, $\operatorname{sen} 3x$.
Passando in campo complesso, per l'eq. $z'' + 9z = 3x e^{ix}$ si cerca una slz. particolare $\bar{z} = (Ax+B)e^{ix}$. Sostituendo nell'eq., si trova che deve essere $\bar{z} = \left(\frac{3}{8}x - \frac{3}{32}i\right)(\cos x + i \operatorname{sen} x)$; dunque $\bar{y} = \operatorname{Im} \bar{z} = -\frac{3}{32}\cos x + \frac{3}{8} x \operatorname{sen} x$.
In conclusione :

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x - \frac{3}{32}\cos x + \frac{3}{8} x \operatorname{sen} x .$$

Imponendo le C.I., si ottiene che deve essere $c_1 = 3/32$, $c_2 = 0$:

$$y = \frac{3}{32}\cos 3x - \frac{3}{32}\cos x + \frac{3}{8} x \operatorname{sen} x .$$