1.

C.E. $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ \sqrt{1-x^2}-x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1\leq x\leq 1 \\ \sqrt{1-x^2} > x \end{cases} \iff -1 \leq x \leq 0 \quad \vee \quad \begin{cases} 0<x\leq 1 \\ x^2 < 1/2 \end{cases}$

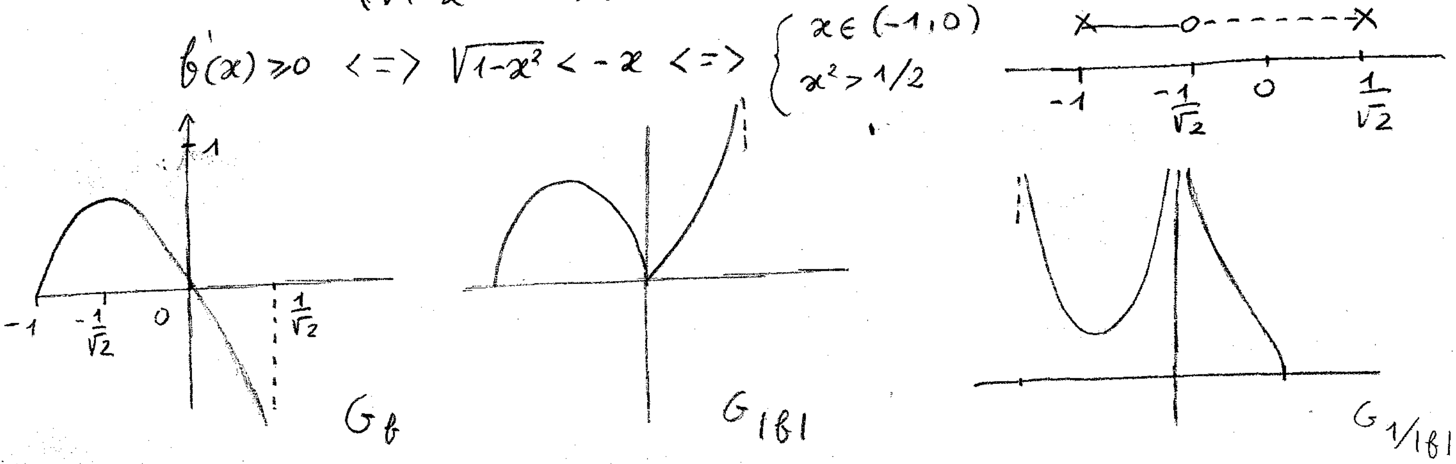
Il C.E. è l'intervallo $[-1, 1/\sqrt{2})$.

LIM per $x \to \frac{1}{\sqrt{2}}^-$ $f(x) \to -\infty$ (asintoto verticale)

$f(-1) = f(0) = 0$

DRV $f'(x) = -\dfrac{\sqrt{1-x^2}+x}{(\sqrt{1-x^2}-x)\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \neq -1$, punto a tangente verticale

$f'(x) \geq 0 \iff \sqrt{1-x^2} < -x \iff \begin{cases} x \in (-1,0) \\ x^2 > 1/2 \end{cases}$



2. nell'intervallo di integrazione è $\operatorname{sen} x = \cos x$ per $x = \pi/4$: l'integrale è improprio perchè la funzione diventa ∞ in tale punto.
Con la formula di Taylor al primo ordine (cioè con quella del differenziale) prendendo $x_0 = \pi/4$, si ottiene
$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{\pi}{4}) + o(x-\frac{\pi}{4})$ $\quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{\pi}{4}) + o(x-\frac{\pi}{4})$
$\operatorname{sen} x - \cos x \sim \sqrt{2}(x-\pi/4)$: l'integrale non esiste perchè la funzione è un infinito di ordine 1 per $x \to \pi/4$.

3. $|a_n| \sim \dfrac{|x|^n}{n}$, $\quad \sqrt[n]{|a_n|} \to |x|$

Dunque la serie converge per $x \in (-1,1)$.
Rimangono da esaminare i valori $x = \pm 1$.
Per $x=1$, $\quad a_n = \dfrac{n^2+2}{n^3+3} \sim \dfrac{1}{n}$: la serie diverge
Per $x=-1$, $\quad a_n = (-1)^n \dfrac{n^2+2}{n^3+3}$: la serie converge per il teor. di Leibniz.
(serie a segno alterno, $\dfrac{n^2+2}{n^3+3} \downarrow 0$. Per provare che decresce, si può passare alla fz. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3+3}$ e far vedere che $f'(x) = \dfrac{-x^4-6x^2+6x}{(x^3+3)^2} \sim -\dfrac{1}{x^2} < 0$ per $x \to +\infty$).

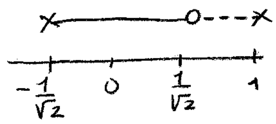
4. Eq. a variabili separate. La sol. costante $y=0$ non soddisfa la C.I.
$\displaystyle\int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx \to \lg|\operatorname{sen} y| = \frac{1}{2}\lg(x^2+4)+c \to$
$|\operatorname{sen} y| = e^c\sqrt{x^2+4} \to \operatorname{sen} y = k\sqrt{x^2+4}$. La CI fornisce $k = 1/4$, dunque
$\operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4} \to y = \operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4}$, $\quad |x| < 2\sqrt{3}$.

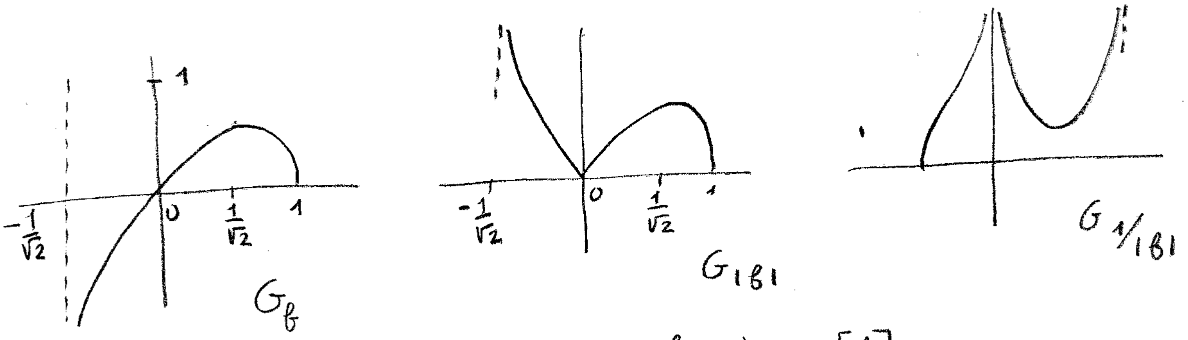
1\. C.E. $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ \sqrt{1-x^2}+x > 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{1-x^2} > -x \end{cases} \longleftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \lor \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x^2 < 1/2 \end{cases}$ $\quad$ C.E. $= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$

LIM per $x \to -\frac{1}{\sqrt{2}}^+$ $f(x) \to -\infty$ (as. verticale), $f(0) = f(1) = 0$.

DRV $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x}{\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)\sqrt{1-x^2}}$ ($x \neq 1$, punto a tangente verticale)

$f'(x) \geq 0 \iff \sqrt{1-x^2} \geq x \iff x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \lor \begin{cases} x \in (0,1] \\ x^2 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$





2\. Per maggiori dettagli, vedere soluzioni [1].
$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + o\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + o\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\operatorname{sen} x + \cos x \sim \sqrt{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ per $x \to -\frac{\pi}{4}$. L'integrale non esiste.

3\. $|a_n| \sim \dfrac{|x|^n}{n}$, $\sqrt[n]{|a_n|} \to |x|$. La serie converge per $-1 < x < 1$.
Per $x = 1$, $a_n \sim \dfrac{1}{n}$ e quindi la serie diverge.
Per $x = 1$, $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n^2+2}$ e la serie converge per Leibniz. (Vedere soluzioni [1]).

4\. $\displaystyle\int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\, dy = \int -\frac{2x}{x^2+4}\, dx \to \lg|\operatorname{sen} y| = -\lg(x^2+4) + c \to$

$|\operatorname{sen} y| = \dfrac{e^c}{x^2+4} \longrightarrow \operatorname{sen} y = \dfrac{k}{x^2+4}$. La C.I. fornisce $k=2$, dunque

$\operatorname{sen} y = \dfrac{2}{x^2+4} \to y = \operatorname{arcsen} \dfrac{2}{x^2+4}$, $x \in \mathbb{R}$.