Soluzioni

1. La fz. ha periodo 2π: possiamo limitare lo studio all'intervallo $[0, 2\pi]$.

C.E. $\begin{cases} \left|\frac{2\,\text{sen}\,x+1}{2\,\text{sen}\,x-1}\right| \le 1 \\ \text{sen}\,x \ne 1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} |2\,\text{sen}\,x+1| \le |2\,\text{sen}\,x-1| \\ \text{sen}\,x \ne 1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\,\text{sen}^2x+4\,\text{sen}\,x+1 \le 4\,\text{sen}^2x-4\,\text{sen}\,x+1 \\ \text{sen}\,x \ne 1/2 \end{cases}$

$\text{sen}\,x \le 0 \iff x \in [\pi, 2\pi]$.

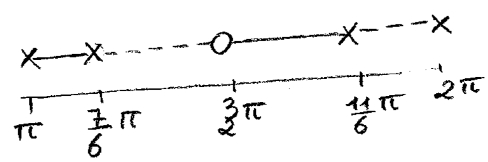
SGN

$f(x) \geq 0$; $f(x) = 0$ se $\left|\frac{2\,\text{sen}\,x+1}{2\,\text{sen}\,x-1}\right| = 1$, cioè $\text{sen}\,x = 0$, ovvero $x = \pi$, $x = 2\pi$.

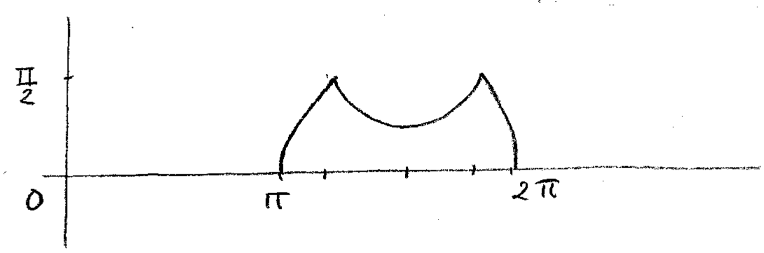
La fz. è simmetrica rispetto a $x = \frac{3}{2}\pi$; quindi basta studiarla in $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$.
(Infatti $f(\pi+\alpha) = f(2\pi-\alpha)$).

DRV

$$f'(x) = \frac{-4\cos x \,\,\text{sgn}(2\,\text{sen}\,x+1)}{\sqrt{-8\,\text{sen}\,x}\,\,(1-2\,\text{sen}\,x)}$$



$x=\pi$, $x = 2\pi$ punti a tg verticale
$x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$ punti angolosi



$f(\frac{7}{6}\pi) = f(\frac{11}{6}\pi) = \frac{\pi}{2}$
$f(\frac{3}{2}\pi) = \arccos\frac{1}{3}$

2. Dalla seconda eq.: $u = \frac{v'+3v}{4}$ e dunque $u' = \frac{v''+3v'}{4}$.
Inoltre $v'(0) = 4u(0) - 3v(0) = 1$.
Sostituendo nella prima eq., si ottiene $v''+2v'+v = 4\,\text{sen}\,x$.
Il polinomio caratteristico K^2+2K+1 ha -1 come unica radice (doppia).
Quindi le soluzioni dell'eq. omogenea sono date da $e^{-x}(c_1+c_2x)$.
Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. complessa $v''+2v'+v = 4e^{ix}$ nella forma Ae^{ix}. Sostituendo, si trova $A = -2i$. Dunque otteniamo la soluzione complessa $-2i(\cos x + i\,\text{sen}\,x)$; la parte immaginaria $-2\cos x$ è una soluzione particolare dell'eq. reale. Dunque: $v(x) = e^{-x}(c_1+c_2x) - 2\cos x$.
Le C.I. sono verificate $c_1 = 3$, $c_2 = 4$.
Trovata $v(x) = e^{-x}(3+4x) - 2\cos x$, si deduce $u(x) = \frac{e^{-x}(5+4x)+\text{sen}\,x-3\cos x}{2}$.

3. Si pone $\sqrt{x+2} = t$, $x = t^2-2$, $dx = 2t\,dt$.

$$\int_1^{\sqrt2}\frac{2t}{t^2+t-2}\,dt = \int_1^{\sqrt2}\left(\frac{4/3}{t+2}+\frac{2/3}{t-1}\right)dt = \left[\frac{4}{3}\lg|t+2| + \frac{2}{3}\lg|t-1|\right]_1^{\sqrt2} = +\infty$$

Ritroviamo il risultato a priori.
L'integrale è improprio perché il denominatore della fz si annulla nell'estremo -1.

$$\frac{1}{x+\sqrt{x+2}} = \frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-x-2} = \frac{x-\sqrt{x+2}}{(x-2)(x+1)} \overset{x\to-1}{\sim} \frac{2/3}{x+1}$$ che è un ∞ di ordine 1.

oppure, posto $x+1=t\to 0$:

$$\frac{1}{t-1+\sqrt{1-t}} \sim \frac{1}{t-1+1-\frac{1}{2}t} \sim \frac{2}{t}.$$

4.

$$\left|\frac{x^{n+1}}{\lg(n+1)}\,\frac{\lg n}{x^n}\right| \to |x|$$

La serie converge per $x\in(-1,1)$.

Per $x=1$, $\frac{1}{\lg n} > \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ la serie diverge

Per $x=-1$, $\frac{(-1)^n}{\lg n}$ $\Rightarrow$ la serie converge per il teorema di Leibniz

$$\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{e^{-nx}}{n} \quad ; \quad \sqrt[n]{\frac{e^{-nx}}{n}} = \frac{e^{-x}}{\sqrt[n]{n}} \to e^{-x}$$

La serie converge per $x>0$.

Per $x=0$, $a_n \sim \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ la serie diverge.