Analisi Matematica _ 15.7.09

Soluzioni

1. $f(x) = (\operatorname{sgn} \lg x)\ \dfrac{|\lg x - 1|}{x} = \begin{cases} -\dfrac{1-\lg x}{x} & x \in [1/e, 1) \\ \dfrac{1-\lg x}{x} & x \in (1, e] \end{cases}$

La funzione ha una discontinuità di I specie (salto finito) per $x=1$; dunque nell'intervallo dato è generalmente continua e, in quanto tale, integrabile.

$$I = -\int_{1/e}^{1} \frac{1-\lg x}{x}\,dx + \int_{1}^{e} \frac{1-\lg x}{x}\,dx$$

$$A = \int_{1/e}^{1} \frac{1-\lg x}{x}\,dx + \int_{1}^{e} \frac{1-\lg x}{x}\,dx .$$

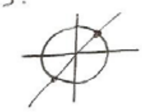
$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{\lg x}{x}\right) dx = \lg x - \frac{1}{2}(\lg x)^2 + c = \varphi(x) + c$$

$\varphi(e) = \frac{1}{2}$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(1/e) = -3/2$

$I = -1$, $A = 2$.

2. Poiché $1 \leq 2 + \operatorname{sen} nx \leq 3$ e dunque $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+\operatorname{sen} nx} \leq 1$, possiamo limitarci a studiare la serie di termine generale $e^{-nx} x^n$.
Applicando il criterio della radice: $\sqrt[n]{a_n} \to \dfrac{x}{e^x} < 1 \quad \forall x \geq 0$.
Dunque la serie è convergente $\forall x \geq 0$.

3. La funzione è 2π-periodica: possiamo dunque limitarci a studiarla per $x \in [0, 2\pi]$.

CE. $\operatorname{sen} x \neq \cos x$  $x \neq \frac{\pi}{4}$, $x \neq \frac{3}{4}\pi$

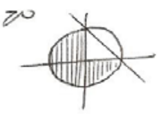
SGN $f(x) = 0$ per $x = 0$, $x = 2\pi$. il denominatore è positivo se il numeratore è positivo, il denominatore è positivo se il numeratore è positivo, il denominatore è positivo se

$\operatorname{sen} x - \cos x > 0$  cioè $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right)$ è l'intervallo di positività.

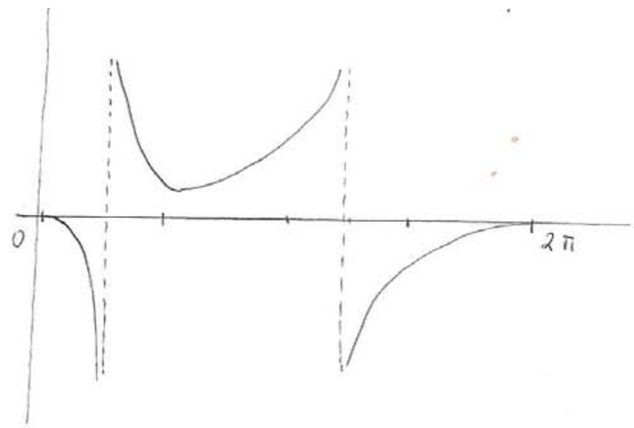
LIM. per $x \to \frac{\pi}{4}^{\pm}$ $f(x) \to \pm\infty$ asintoto verticale
per $x \to \frac{5}{4}\pi^{\pm}$ $f(x) \to \mp\infty$ asintoto verticale.

DRV $\dfrac{1 - \operatorname{sen} x - \cos x}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$.

$1 - \operatorname{sen} x - \cos x \geq 0$
$1 - Y - X \geq 0$
$Y \leq 1 - X$



$f'(0) = f'(2\pi) = 0$



4. Le soluzioni costanti $y=0$, $y=-1$ dell'eq. non verificano la condizione iniziale.

$$\int_3^y \frac{ds}{s\sqrt{s+1}} = \int_0^x s\,ds$$

nel primo integrale si pone $\sqrt{s+1} = t \rightarrow s = t^2-1$, $ds = 2t\,dt$:

$$\int_2^{\sqrt{y+1}} \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int_0^x s\,ds \quad \Leftrightarrow \quad \int_2^{\sqrt{y+1}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \int_0^x s\,ds$$

$$\lg\left|\frac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt{y+1}+1}\right| = \frac{x^2-\log 9}{2}.$$

Data la condizione iniziale, risulta $y>0$:

$$\lg \frac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt{y+1}+1} = \frac{x^2-\log 9}{2} \Rightarrow \lg 3\,\frac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt{y+1}+1} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\sqrt{y+1}-1}{\sqrt{y+1}+1} = \frac{1}{3}e^{x^2/2} \Rightarrow \sqrt{y+1} = \frac{3+e^{x^2/2}}{3-e^{x^2/2}} \qquad (*)$$

$$y = \left(\frac{3+e^{x^2/2}}{3-e^{x^2/2}}\right)^2 - 1.$$

(*) Deve essere $\begin{cases} 3-e^{x^2/2} > 0 \\ \left(\frac{3+e^{x^2/2}}{3-e^{x^2/2}}\right)^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3-e^{x^2/2} > 0 \\ \frac{3+e^{x^2/2}}{3-e^{x^2/2}} > 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$|x| < \sqrt{2\log 3}.$$