

1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{\log^4 x - 2 \log^3 x + \log^2 x}}{x \log x}$$

(a) dire se è integrabile nell'intervallo $[1/e , e]$

(b) in caso affermativo, calcolare il valore dell'integrale definito su tale intervallo

(c) trovare l'area della regione di piano compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse nell'intervallo assegnato.

2. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx} x^n}{2 + \sin nx} ,$$

studiarne la convergenza al variare del parametro $x \geq 0$.

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x - \cos x}$$

e tracciarne il grafico.

Lo studio della derivata seconda è facoltativo.

4. Data l'equazione differenziale

$$y' = x y \sqrt{y+1}$$

con la condizione iniziale $y(0) = 3$, trovarne la soluzione in forma esplicita, precisandone l'intervallo di esistenza.

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.

1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{\log^4 x - 4 \log^3 x + 4 \log^2 x}}{x \log x}$$

(a) dire se è integrabile nell'intervallo $[1/e^2 , e^2]$

(b) in caso affermativo, calcolare il valore dell'integrale definito su tale intervallo

(c) trovare l'area della regione di piano compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse nell'intervallo assegnato.

2. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \cos(n^2 x)}{e^{n x}} x^{2n} ,$$

studiarne la convergenza al variare del parametro $x \geq 0$.

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{\sin x + \cos x}$$

e tracciarne il grafico.

Lo studio della derivata seconda è facoltativo.

4. Data l'equazione differenziale

$$y' = x (y-1) \sqrt{y}$$

con la condizione iniziale $y(0) = 4$, trovarne la soluzione in forma esplicita, precisandone l'intervallo di esistenza.

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.