

Analisi Matematica - Prova scritta del 16.07.08

Soluzioni

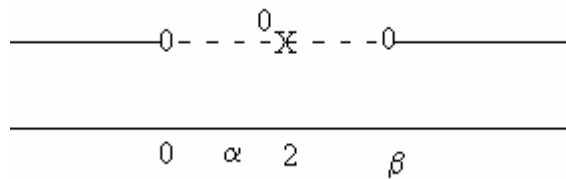
1. Funzione

C.E.  $\mathbb{R} - \{2\}$

SGN lo stesso segno di  $x$ ; in particolare la funzione si annulla per  $x = 0$ .

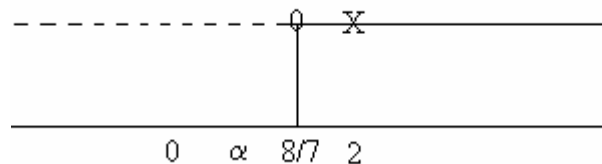
LIM per  $x \rightarrow 2^-$   $f(x) \rightarrow 0$  disc. eliminabile da sinistra  
 per  $x \rightarrow 2^+$   $f(x) \rightarrow +\infty$  asintoto verticale da destra  
 per  $x \rightarrow \pm\infty$   $f(x) \approx ex \rightarrow \pm\infty$   
 $f(x) - ex = ex (e^{3/(x-2)} - 1) \approx 3ex/x \rightarrow 3e$ .  
 La retta  $y = ex + 3e$  è asintoto obliquo.

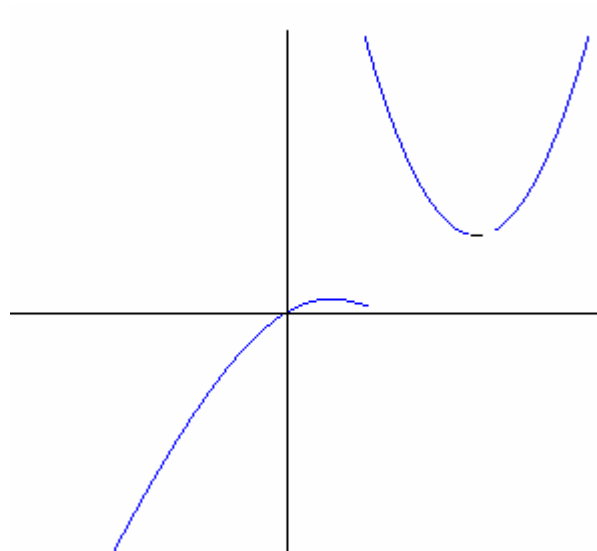
DRV 
$$f'(x) = e^{\frac{x+1}{x-2}} \left( 1 - \frac{3x}{(x-2)^2} \right) = e^{\frac{x+1}{x-2}} \left( \frac{x^2 - 7x + 4}{(x-2)^2} \right)$$



Per  $x \rightarrow 2^-$   $f'(x) \rightarrow 0$  punto a tangente sinistra orizzontale

$$f''(x) = 3e^{\frac{x+1}{x-2}} \left( \frac{7x - 8}{(x-2)^4} \right)$$





## 2. Complessi

Tenendo conto che  $z \bar{z} = |z|^2$ , si può riscrivere l'equazione nella forma

$$|z|^4 z^6 + 2 |z|^2 z^3 + 2 = 0$$

ovvero, ponendo  $|z|^2 z^3 = w$  :

$$w^2 + 2w + 2 = 0.$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado, si ottiene

$$w = -1 \pm i = \sqrt{2} \exp(\pm i 3\pi/4).$$

D'altra parte, scrivendo  $z = r \exp(i\theta)$ , risulta anche  $w = r^5 \exp(3i\theta)$ .  
In definitiva, deve essere :

$$r = \sqrt[5]{2} \quad , \quad \theta = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} k \pi \quad \text{con } k = 0, 1, 2.$$

## 3. Serie

$$n^2 + n \approx n^2 \quad n^x + x^n \approx \begin{cases} x^n & \text{se } x > 1 \\ n^x & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Dunque ,

se  $x > 1$   $a_n \approx x^n / n^2$  e la serie diverge perché non è verificata la condizione necessaria

se  $x < 1$   $a_n \approx 1 / n^{2-x}$  e la serie converge perché  $2 - x > 1$

se  $x = 1$   $a_n \approx 1/n$  e la serie diverge.

#### 4. Equazione differenziale

Non ci sono soluzioni costanti.

Applicando il consueto metodo di risoluzione delle equazioni a variabili separate, si ottiene

$$\int_{y_0}^y e^{s/2} ds = \int_{x_0}^x \frac{\arcsen s/3}{\sqrt{9-x^2}} ds .$$

Il primo integrale è pressoché immediato, il secondo si calcola ponendo  $s/3 = t$ .

In definitiva si trova :

$$2 e^{y/2} = \frac{1}{2} \left( \arcsen^2 \frac{x}{3} + c \right)$$

$$y(x) = 2 \log \left( \frac{\arcsen^2 \frac{x}{3} + c}{4} \right) .$$

La condizione iniziale è verificata per  $c = 4 - \pi^2 / 4$  .