Analisi Matematica - Corso A

Soluzioni del test di ingresso

con cenni di risoluzione

Versione **[1]**

1. E A B D C F
2. C
3. C
4. D
5. A
6. C
7. C
8. C
9. $S(x) = x^2 + 1$ $R(x) = -x - 1$
10. C
11. A
12. B
13. C
14. C
15. C
16. A

Versione **[2]**

1. B D E A F C
2. B
3. B
4. D
5. A
6. B
7. C
8. C
9. $S(x) = x^2 - x + 1$ $R(x) = -2$
10. C
11. B
12. A
13. C
14. E
15. C
16. B

Versione **[3]**

1. E A B F C D
2. D
3. D
4. D
5. A
6. C
7. C
8. B
9. $S(x) = x^2 - 2$ $R(x) = 3$
10. D
11. D
12. C
13. C
14. E
15. C
16. B

Versione **[4]**

1. D B E A F C
2. C
3. A
4. D
5. A
6. B
7. C
8. C
9. $S(x) = x^2 - x + 1$ $R(x) = -3x + 1$
10. D
11. B
12. C
13. C
14. C
15. C
16. B

Cenni di risoluzione

1. Come è ovvio, confrontiamo separatamente i numeri negativi e quelli positivi. Avendo a disposizione una calcolatrice, il problema non presenta alcuna difficoltà. Guardiamo qualche esempio di confronto risolto per via “manuale”.
   Ad esempio, guardiamo se è $\sqrt{3} < 5/4$. Poiché i due numeri sono > 0 , possiamo confrontare in modo equivalente i loro quadrati : $3 < 25/16 \leftrightarrow 3 \cdot 16 < 25 \leftrightarrow 48 < 25$, che è falsa; dunque $\sqrt{3} > 5/4$
   Controlliamo adesso se $-\sqrt{2}\,/\,4 < -4/9$; questo equivale a $\sqrt{2}\,/\,4 > 4/9$, ovvero elevando al quadrato, a $2/16 > 16/81 \leftrightarrow 2 \cdot 81 > 16^2 \leftrightarrow 162 > 256$, che è falsa ; dunque $-\sqrt{2}\,/\,4 > -4/9$.
   Si ricordi anche che $0,\overline{2} = 2/9$, $0,\overline{3} = 3/9 = 1/3$.

2. Data una retta di coefficiente angolare m, le rette ad essa perpendicolari hanno coefficiente angolare m’ = -1/m. Tra le rette proposte ce n’è una sola che soddisfa questa condizione ; inoltre è facile verificare che passa per il punto dato.

3. Dopo aver portato il termine noto a primo membro (cambiandogli segno) e aver ridotto a denominatore comune, si ottiene un rapporto che deve essere > 0 ; questo accade quando numeratore e denominatore hanno lo stesso segno. Occorre dunque studiare il segno di queste due quantità e considerare gli intervalli in cui concordano.
   Osservare che il numeratore che si ottiene è un polinomio di 2^0 grado che nei casi [1], [2] e [4] ha $\Delta < 0$: dunque il polinomio è sempre > 0. Nel caso [3] risulta invece $\Delta = 0$: dunque il polinomio è sempre > 0 , eccetto un valore per cui si annulla e che nel nostro caso va scartato.

4. Si può procedere in 2 modi diversi , ma equivalenti.
   Un primo metodo prevede di togliere il valore assoluto ed esaminare i 2 casi che questo comporta. Infatti $| x - a | = x - a$ se $x \geq a$, mentre $| x - a | = a - x$ se $x < a$. Si devono dunque esaminare due equazioni di 1^0 grado, ciascuna con una condizione aggiuntiva.
   In alternativa, si può isolare a primo membro il termine con il valore assoluto e poi elevare al quadrato ambo i membri, dopo aver imposto che il 2^0 membro risulti positivo. In questo modo si ottiene un’equazione di 2^0 grado con una limitazione.

5. Prima di elevare al quadrato in modo da togliere la radice, dobbiamo dare significato alla radice stessa (la quantità sotto radice deve essere ≥ 0) e imporre che il secondo membro dell’equazione sia ≥ 0. Una volta elevato al quadrato, si ottiene un’equazione di 2^0 grado con le due restrizioni sopra trovate.

6. Due angoli supplementari quali sono α , β hanno lo stesso seno ma coseno e tangente opposti.

7. La funzione seno (come anche il coseno) assume solo i valori dell’intervallo [-1, 1]; dunque perché l’equazione ammetta soluzioni, anche il termine noto deve cadere in questo intervallo.

8. L'equazione sen x = p con $-1 \le p \le 1$ ha due infinità di soluzioni, della forma $x = \alpha^0 + k\, 360^0$ oppure $x = 180^0 - \alpha^0 + k\, 360^0$, con k intero.
Analogamente, l'equazione cos x = p con $-1 \le p \le 1$ ha due infinità di soluzioni, della forma $x = \alpha^0 + k\, 360^0$ oppure $x = -\alpha^0 + k\, 360^0$, con k intero.
L'equazione tg x = p con p reale qualunque ha le soluzioni della forma $x = \alpha^0 + k\, 180^0$ (la funzione tangente ha periodo 180^0, mentre seno e coseno hanno periodo 360^0).
In analisi si preferisce studiare queste equazioni misurando gli angoli in radianti invece che in gradi. Così ad esempio le soluzioni dell'equazione sen x = p si scrivono preferibilmente nella forma $x = a + 2k\pi$ oppure $x = \pi - a + 2k\pi$. Analogamente per le altre equazioni.

9. Si tratta di applicare l'algoritmo della divisione tra polinomi, che qui non abbiamo \lo spazio per richiamare.

10. Un polinomio della forma $ax^2 + bx + c$ con $a > 0$ ha come grafico una parabola con asse verticale e concavità rivolta verso l'alto. Il caso $\Delta < 0$ corrisponde ad una parabola tutta situata al di sopra dell'asse delle x, quella con $\Delta = 0$ ad una parabola situata al di sopra dell'asse delle x ma ad esso tangente in un punto, quella con $\Delta > 0$ ad una parabola che interseca l'asse delle x in 2 punti. Dunque, se vogliamo che il polinomio sia sempre > 0, deve essere $\Delta < 0$; se vogliamo che sia ≤ 0 in almeno un punto , deve essere $\Delta \ge 0$.
In maniera analoga si tratta il caso $a < 0$, tenendo conto che adesso la parabola ha la concavità rivolta verso il basso e dunque è sempre sotto l'asse delle x se $\Delta < 0$, è sotto l'asse delle x ma ad esso tangente in un punto se $\Delta = 0$, interseca l'asse in 2 punti se $\Delta > 0$.

11. Basta ricordare la proprietà $(a^b)^x = a^{bx}$ (ad es. $8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$) e che un'equazione della forma $a^x = a^y$ è verificata solo per x = y .

12. Un'equazione della forma $\log_a x = k$ è verificata per $x = a^k$.

13. Una disequazione della forma $\log_a | x | > k$ (con $a > 1$) è verificata per $| x | > a^k$ e questa , a sua volta , per $x > a^k$ oppure $x < - a^k$.
Nel caso proposto, invece che x, compare un'espressione della forma p x + q : si devono dunque risolvere le disequazioni $p x + q > a^k$ oppure $p x + q < - a^k$.

14. Il grafico della funzione | f (x) | coincide con quello della funzione f (x) nei punti in cui è $f (x) \ge 0$, ne è il simmetrico rispetto all'asse delle x dove $f (x) < 0$.

15. Per rispondere al quesito, conviene disegnare il grafico della funzione nell'intervallo assegnato: la curva che si ottiene è un arco di parabola. La sua proiezione sull'asse delle y permette di leggere i valori che la funzione assume (cioè l'immagine della funzione). E' sbagliato controllare solo il valore della funzione agli estremi del dominio: l'intervallo che si ottiene è solo un sottoinsieme dell'immagine (a meno che la funzione sia continua e crescente o decrescente). Lo studio dell'analisi permetterà di chiarire meglio questa osservazione e fornirà un metodo di risoluzione non grafico.

16. $(g \circ h \circ f) (x) = \sqrt{\log_2 \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\log_2 x^{-2}} = \sqrt{-2\log_2 x}$

$$(f \circ h \circ g)(x) = \frac{1}{(\log_2 \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\left(\frac{\log_2 x}{2}\right)^2} = \frac{4}{(\log_2 x)^2}$$

$$(f \circ g \circ h)(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}^{\;2}} = \frac{1}{\log_2 x}$$

$$(h \circ g \circ f)(x) = \log_2 \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \log_2 x^{-1} = - \log_2 x$$ (abbiamo utilizzato l'ipotesi $x > 0$) .