Soluzioni [1]

1.

Dobbiamo far vedere che x_n verifica le due condizioni della definizione ricorsiva.
La verifica che sia $x_1 = 8/5$ è immediata.
Rimane da provare che è

$$2 \frac{4^{n+1}}{4^{n+1}+1} = \frac{8 \dfrac{2 \cdot 4^n}{4^n+1}}{3 \dfrac{2 \cdot 4^n}{4^n+1} + 2} .$$

Riscriviamo il secondo membro:

$$\frac{\dfrac{16 \cdot 4^n}{4^n+1}}{\dfrac{6 \cdot 4^n + 2 \cdot 4^n + 2}{4^n+1}} = \frac{16 \cdot 4^n}{8 \cdot 4^n + 2} = \frac{8 \cdot 4^n}{4 \cdot 4^n + 1} = \frac{2 \cdot 4^{n+1}}{4^{n+1} + 1} ;$$

questo permette di concludere.

2.

$$\left(g \circ h \circ f\right) (x) = \frac{\sqrt{\log x} + 1}{\sqrt{\log x} - 1}$$

Condizioni per l'esistenza della funzione :

$$\begin{cases} x > 0 & \text{per il logaritmo} \\ \log x \geq 0 & \text{per la radice} \\ \sqrt{\log x} \neq 1 & \text{per il denominatore} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \\ x \neq e \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1 , e) \cup (e , +\infty) .$$

3.

Il C.E. della disequazione si ottiene imponendo le condizioni:

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 2 - \sqrt{x + 2} > 0 \\ 2 x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2 , 2) .$$

Osserviamo poi che è

$$\log_{16} (2 x + 5) = \frac{\log_4 (2 x + 5)}{\log_4 16} = \frac{\log_4 (2 x + 5)}{\log_4 4^2} = \frac{1}{2} \log_4 (2 x + 5) .$$

Sostituendo nella disequazione e moltiplicando ambo i membri per 2, si ottiene :

$$2\ \log_4 \left(2 - \sqrt{x+2}\ \right) > \log_4 \left(2x + 5 \right)$$

da cui

$$\log_4 \left(2 - \sqrt{x+2}\ \right)^2 > \log_4 \left(2x + 5 \right) \ .$$

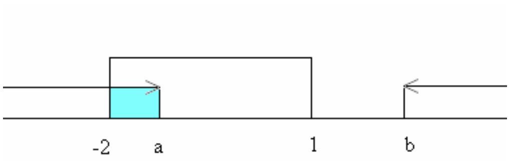
Deve dunque essere

$$\begin{cases} -2 \le x < 2 \\ \left(2 - \sqrt{x+2}\ \right)^2 > 2x + 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \text{sviluppando il quadrato e semplificando}$$

$$\begin{cases} -2 \le x < 2 \\ 4\sqrt{x+2} < 1 - x \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

perché la disequazione abbia soluzioni, il secondo membro deve essere positivo; ciò stabilito, elevando al quadrato e semplificando

$$\begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ x^2 - 18x - 32 > 0 \end{cases}$$



$a = 9 - \sqrt{113}$, $b = 9 + \sqrt{113}$

In conclusione : $-2 \le x < 9 - \sqrt{113}$.

4.

(i) Per provare che è decrescente, dobbiamo far vedere che $\forall\ n \in N$ risulta :

$$\log\left(e^{\frac{\sqrt{n+2}}{n+1}} - 1 \right) < \log\left(e^{\frac{\sqrt{n+1}}{n}} - 1 \right) \quad \Leftrightarrow$$

eliminando il logaritmo (che è una funzione crescente), semplificando il termine -1, eliminando l'esponenziale (che è una funzione crescente)

$$\frac{\sqrt{n+2}}{n+1} < \frac{\sqrt{n+1}}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \text{elevando al quadrato e togliendo i denominatori}$$

$$n^2 (n + 2) < (n + 1)^3 \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 3n + 1 > 0$$

La disequazione a cui siamo arrivati è sempre verificata nell'insieme dei numeri naturali.

(ii)

Per provare che la successione non è limitata inferiormente , occorre far vedere che

$$\forall\ M > 0\ ,\ \exists\ n \in N :\ \log\left(\ e^{\frac{\sqrt{n+2}}{n+1}}\ -1\right) < -M\ .$$

La disequazione equivale successivamente a :

$$e^{\frac{\sqrt{n+2}}{n+1}}\ -\ 1\ <\ e^{-M}\ \Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} < \log\left(1+e^{-M}\right)\ \Leftrightarrow$$

L'argomento del logaritmo a secondo membro è maggiore di 1 : il logaritmo ha dunque senso ed è positivo. Possiamo dunque elevare al quadrato ambo i membri della disequazione . Togliendo anche il denominatore e ponendo (per semplificare la notazione) $K = \log\left(\ 1 + e^{-M}\ \right)$, si ottiene

$$n + 2 < n^2 K^2 + 2\, n\, K^2 + K^2\ \Leftrightarrow\ K^2 n^2\ + (\ 2\, K^2 - 1\ )\, n + (\ K^2 - 2\ ) > 0\ .$$

Risolvendo la disequazione nel modo consueto , si trova che <u>tra le soluzioni</u> ci sono i valori di n tali che

$$n > \frac{2\, K^2\ -1 + \sqrt{\ 4\, K^2 + 1}}{2\, K^2}\ .$$

Poiché a noi basta trovare almeno un valore di n che risolva la disequazione, abbiamo raggiunto l'obiettivo.

(iii)

Poiché la successione è decrescente e non limitata inferiormente, abbiamo :

$\min x_n$ non esiste $\qquad\qquad \inf x_n = -\infty$

$$\max x_n\ =\ \sup x_n\ =\ x_1 =\ \log\left(e^{\sqrt{2}}\ -1\right)\ .$$

Soluzioni [2]

1.

Dobbiamo far vedere che x_n verifica le due condizioni della definizione ricorsiva.
La verifica che sia $x_1 = 3/4$ è immediata.
Rimane da provare che è

$$\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}+1} = \frac{3\,\dfrac{3^n}{3^n+1}}{2\,\dfrac{3^n}{3^n+1}+1}.$$

Riscriviamo il secondo membro:

$$\frac{\dfrac{3\cdot 3^n}{3^n+1}}{\dfrac{2\cdot 3^n + 3^n + 1}{3^n+1}} = \frac{3^{n+1}}{3\cdot 3^n + 1} = \frac{3^{n+1}}{3^{n+1} + 1};$$

questo permette di concludere.

2.

$$\left(h \circ g \circ f\right)(x) = \sqrt{\frac{\log x + 1}{\log x - 1}}$$

Condizioni per l'esistenza della funzione :

$$\begin{cases} x > 0 & \text{per il logaritmo} \\ \log x \neq 1 & \text{per il denominatore} \\ \dfrac{\log x+1}{\log x-1} \geq 0 & \text{per la radice} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e \\ \log x \leq -1 \text{ opp. } \log x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e \\ x \leq 1/e \text{ opp. } x \geq e \end{cases} \Leftrightarrow x \in (\,0\,,\,1/e\,] \cup (\,e\,,+\infty\,)$$

3.

Il C.E. della disequazione si ottiene imponendo le condizioni:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ \sqrt{x+3} < 2 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (-1/2 , 1) .$$

Osserviamo poi che è

$$\log_{25} (2x + 1) = \frac{\log_5 (2x + 1)}{\log_5 25} = \frac{\log_5 (2x + 1)}{\log_5 5^2} = \frac{1}{2} \log_5 (2x + 1) .$$

Sostituendo nella disequazione e moltiplicando ambo i membri per 2, si ottiene :

$$2 \log_5 (2 - \sqrt{x+3}) < \log_5 (2x + 1)$$

da cui

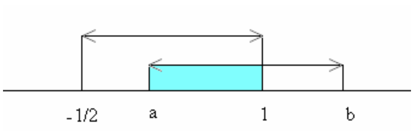
$$\log_5 (2 - \sqrt{x+3})^2 < \log_5 (2x + 1) .$$

Deve dunque essere

$$\begin{cases} -1/2 < x < 1 \\ (2 - \sqrt{x+3})^2 < 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$ sviluppando il quadrato e semplificando

$$\begin{cases} -1/2 < x < 1 \\ 4 \sqrt{x+3} > 6 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$ poiché il secondo membro è positivo, possiamo elevare al quadrato; semplificando , si ottiene :

$$\begin{cases} -1/2 < x < 1 \\ x^2 - 28x - 12 < 0 \end{cases}$$



$a = 14 - 4\sqrt{13}$, $b = 14 + 4\sqrt{13}$

In conclusione : $14 - 4\sqrt{13} < x < 1$.

4.

(i) Per provare che è crescente, dobbiamo far vedere che $\forall\, n \in N$ risulta :

$$\log \left(e^{\frac{n}{\sqrt{n+1}}} - 1 \right) < \log \left(e^{\frac{n+1}{\sqrt{n+2}}} - 1 \right) \Leftrightarrow$$

eliminando il logaritmo (che è una funzione crescente), semplificando il termine -1, eliminando l'esponenziale (che è una funzione crescente)

$$\frac{n}{\sqrt{n+1}} < \frac{n+1}{\sqrt{n+2}} \quad \Leftrightarrow \quad \text{elevando al quadrato e togliendo i denominatori}$$

$$n^2 (n+2) < (n+1)^3 \quad \Leftrightarrow \quad \dots \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 3n + 1 > 0$$

La disequazione a cui siamo arrivati è sempre verificata nell'insieme dei numeri naturali.

(ii)
Per provare che la successione non è limitata superiormente , occorre far vedere che

$$\forall M > 0 , \ \exists n \in N : \log \left(e^{\frac{n}{\sqrt{n+1}}} - 1 \right) > M .$$

La disequazione equivale successivamente a :

$$e^{\frac{n}{\sqrt{n+1}}} - 1 > e^M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{\sqrt{n+1}} > \log (1 + e^M) \quad \Leftrightarrow$$

L'argomento del logaritmo a secondo membro è maggiore di 1 : il logaritmo ha dunque senso ed è positivo. Possiamo dunque elevare al quadrato ambo i membri della disequazione . Togliendo anche il denominatore e ponendo (per semplificare la notazione) $K = \log (1 + e^M)$, si ottiene

$$n^2 > n K^2 + K^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - K^2 n - K^2 > 0 .$$

Risolvendo la disequazione nel modo consueto , si trova che <u>tra le soluzioni</u> ci sono i valori di n tali che

$$n > \frac{K^2 + \sqrt{K^4 + 4K^2}}{2} .$$

Poiché a noi basta trovare almeno un valore di n che risolva la disequazione, abbiamo raggiunto l'obiettivo.

(iii)

Poiché la successione è crescente e non limitata superiormente, abbiamo :

$\max x_n$ non esiste $\qquad\qquad$ $\sup x_n = +\infty$

$$\min x_n = \inf x_n = x_1 = \log \left(e^{1/\sqrt{2}} - 1 \right) .$$

Soluzioni [3]

1.

Dobbiamo far vedere che x_n verifica le due condizioni della definizione ricorsiva.
La verifica che sia $x_1 = 1/2$ è immediata.
Rimane da provare che è

$$\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+2} = \frac{2\,\frac{2^n}{2^n+2}}{\frac{2^n}{2^n+2}+1}.$$

Riscriviamo il secondo membro:

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{2^n+2}}{\frac{2^n+2^n+2}{2^n+2}} = \frac{2^{n+1}}{2\cdot 2^n+2} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+2}\ ;$$

questo permette di concludere.

2.

$$\left(f \circ g \circ h\right)(x) = \log \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

Condizioni per l'esistenza della funzione :

$$\begin{cases} x \geq 0 & \text{per la radice} \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 & \text{per il denominatore} \\ \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > 0 & \text{per il logaritmo} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1, +\infty).$$

3.

Il C.E. della disequazione si ottiene imponendo le condizioni:

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ \sqrt{x+4} > 1 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3, 3).$$

Osserviamo poi che è

$$\log_9 (3 - x) = \frac{\log_3 (3 - x)}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3 - x)}{\log_3 3^2} = \frac{1}{2} \log_3 (3 - x) .$$

Sostituendo nella disequazione e moltiplicando ambo i membri per 2, si ottiene :

$$2 \log_3 \left(\sqrt{x + 4} - 1 \right) > \log_9 (3 - x)$$

da cui

$$\log_3 \left(\sqrt{x + 4} - 1 \right)^2 > \log_3 (3 - x) .$$

Deve dunque essere

$$\begin{cases} -3 < x < 3 \\ \left(\sqrt{x + 4} - 1 \right)^2 > 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$ sviluppando il quadrato e semplificando

$$\begin{cases} -3 < x < 3 \\ \sqrt{x + 4} < 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow$$ perché la disequazione abbia soluzioni, il secondo membro deve essere positivo; ciò stabilito, elevando al quadrato e semplificando

$$\begin{cases} -1 \le x < 3 \\ x^2 + x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} , \quad b = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

In conclusione : $\dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2} < x < 3$.

4.

(i) Per provare che è decrescente, dobbiamo far vedere che $\forall n \in N$ risulta :

$$\log \left(e^{\frac{\sqrt{2n + 3}}{n + 1}} - 1 \right) < \log \left(e^{\frac{\sqrt{2n + 1}}{n}} - 1 \right) \Leftrightarrow$$

eliminando il logaritmo (che è una funzione crescente), semplificando il termine -1, eliminando l'esponenziale (che è una funzione crescente)

$$\frac{\sqrt{2n + 3}}{n + 1} < \frac{\sqrt{2n + 1}}{n} \Leftrightarrow$$ elevando al quadrato e togliendo i denominatori

$$n^2 (2n + 3) < (n + 1)^2 (2n + 1) \Leftrightarrow \quad \dots \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 + 4n + 1 > 0$$

La disequazione a cui siamo arrivati è sempre verificata nell'insieme dei numeri naturali.

(ii)
Per provare che la successione non è limitata inferiormente , occorre far vedere che

$$\forall\, M > 0\ ,\ \exists\, n \in N :\ \log\left(e^{\frac{\sqrt{2n+1}}{n}} - 1\right) < -M\ .$$

La disequazione equivale successivamente a :

$$e^{\frac{\sqrt{2n+1}}{n}} - 1 < e^{-M} \iff \frac{\sqrt{2n+1}}{n} < \log\left(1 + e^{-M}\right) \iff$$

L'argomento del logaritmo a secondo membro è maggiore di 1 : il logaritmo ha dunque senso ed è positivo. Possiamo dunque elevare al quadrato ambo i membri della disequazione . Togliendo anche il denominatore e ponendo (per semplificare la notazione) $K = \log\left(1 + e^{-M} \right)$, si ottiene

$$2n + 1 < n^2 K^2 \iff K^2 n^2 - 2n - 1 > 0\ .$$

Risolvendo la disequazione nel modo consueto , si trova che <u>tra le soluzioni</u> ci sono i valori di n tali che

$$n > \frac{1 + \sqrt{1 + K^2}}{K^2}\ .$$

Poiché a noi basta trovare almeno un valore di n che risolva la disequazione, abbiamo raggiunto l'obiettivo.

(iii)

Poiché la successione è decrescente e non limitata inferiormente, abbiamo :

$\min x_n$ non esiste $\qquad\qquad \inf x_n = -\infty$

$$\max x_n = \sup x_n = x_1 = \log\left(e^{\sqrt{3}} - 1\right)\ .$$

Soluzioni [4]

1.

Dobbiamo far vedere che x_n verifica le due condizioni della definizione ricorsiva.
La verifica che sia $x_1 = 3/2$ è immediata.
Rimane da provare che è

$$\frac{3 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1}+2} = \frac{6\,\dfrac{3 \cdot 2^n}{2^n+2}}{\dfrac{3 \cdot 2^n}{2^n+2} + 3}.$$

Riscriviamo il secondo membro:

$$\frac{\dfrac{18 \cdot 2^n}{2^n+2}}{\dfrac{3 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n + 6}{2^n+2}} = \frac{18 \cdot 2^n}{6 \cdot 2^n + 6} = \frac{6 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^n + 2} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+1} + 2};$$

questo permette di concludere.

2.

$$\left(h \circ g \circ f\right)(x) = \frac{\log \sqrt{x} + 1}{\log \sqrt{x} - 1}$$

Condizioni per l'esistenza della funzione :

$$\begin{cases} x \geq 0 & \text{per la radice} \\ \sqrt{x} > 0 & \text{per il logaritmo} \\ \log \sqrt{x} > 1 & \text{per il denominatore} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \\ \sqrt{x} > e \end{cases} \Leftrightarrow x \in (e^2, +\infty)$$

3.

Il C.E. della disequazione si ottiene imponendo le condizioni:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ \sqrt{x+3} > 1 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x < 2 \\ x + 3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2, 2).$$

Osserviamo poi che è

$$\log_4 (2 - x) = \frac{\log_2(2 - x)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(2 - x)}{\log_2 2^2} = \frac{1}{2} \log_2(2 - x) .$$

Sostituendo nella disequazione e moltiplicando ambo i membri per 2, si ottiene :

$$2 \log_2 (\sqrt{x+3} - 1) < \log_2 (2 - x)$$

da cui

$$\log_2 (\sqrt{x+3} - 1)^2 < \log_2 (2 - x) .$$

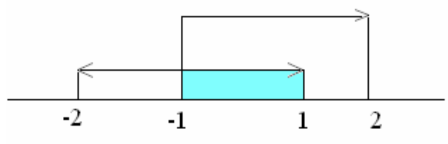
Deve dunque essere

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ (\sqrt{x+3} - 1)^2 < 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$ sviluppando il quadrato e semplificando

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ \sqrt{x+3} > x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

se il secondo membro è negativo , la disequazione è sicuramente verificata; se è positivo, possiamo elevare al quadrato; semplificando , si ottiene :

$$-2 < x < -1 \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$$



In conclusione : $-2 < x < 1$.

4.

(i) Per provare che è crescente, dobbiamo far vedere che $\forall$ n $\in$ N risulta :

$$\log \left(e^{\frac{n+1}{\sqrt{2n+3}}} - 1 \right) < \log \left(e^{\frac{n}{\sqrt{2n+1}}} - 1 \right) \Leftrightarrow$$

eliminando il logaritmo (che è una funzione crescente), semplificando il termine -1, eliminando l'esponenziale (che è una funzione crescente)

$$\frac{n+1}{\sqrt{2n+3}} > \frac{n}{\sqrt{2n+1}} \iff \text{elevando al quadrato e togliendo i denominatori}$$

$$(n+1)^2 (2n+1) < n^2 (2n+3) \iff \dots \iff 2n^2 + 4n + 1 > 0$$

La disequazione a cui siamo arrivati è sempre verificata nell'insieme dei numeri naturali.

(ii)
Per provare che la successione non è limitata superiormente , occorre far vedere che

$$\forall\ M > 0\ ,\ \exists\ n \in N : \log\left(e^{\frac{n}{\sqrt{2n+1}}} - 1 \right) > M\ .$$

La disequazione equivale successivamente a :

$$e^{\frac{n}{\sqrt{2n+1}}} - 1 > e^M \iff \frac{n}{\sqrt{2n+1}} > \log(1 + e^M) \iff$$

L'argomento del logaritmo a secondo membro è maggiore di 1 : il logaritmo ha dunque senso ed è positivo. Possiamo dunque elevare al quadrato ambo i membri della disequazione . Togliendo anche il denominatore e ponendo (per semplificare la notazione) $K = \log(1 + e^M)$, si ottiene

$$n^2 > 2n K^2 + K^2 \iff n^2 - 2K^2 n - K^2 > 0\ .$$

Risolvendo la disequazione nel modo consueto , si trova che <u>tra le soluzioni</u> ci sono i valori di n tali che

$$n > K^2 + \sqrt{K^4 + K^2}\ .$$

Poiché a noi basta trovare almeno un valore di n che risolva la disequazione, abbiamo raggiunto l'obiettivo.

(iii)

Poiché la successione è crescente e non limitata superiormente, abbiamo :

$\max x_n$ non esiste $\qquad\qquad \sup x_n = +\infty$

$$\min x_n = \inf x_n = x_1 = \log\left(e^{1/\sqrt{3}} - 1\right)\ .$$