Soluzioni della prova parziale n.1 del 2 . 11 . 05 *Fila 1*

1. $$\frac{2x-1}{2x-3} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ 2x-3 < 0 \end{cases} \text{opp.} \begin{cases} 2x-1 \le 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1/2 \\ x < 3/2 \end{cases} \text{opp.} \begin{cases} x \le 1/2 \\ x > 3/2 \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce $x \in [\,½ , 3/2\,)$, il secondo non ha soluzioni; dunque A = $[\,½ , 3/2\,)$.

$$\frac{x-2}{|x+1|} \ge 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 \ge 2(x+1) \end{cases} \text{opp.} \begin{cases} x+1 < 0 \\ x-2 \ge 2(-x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \le -4 \end{cases} \text{opp.} \begin{cases} x < -1 \\ 3x \ge 0 \end{cases}$$

Entrambi i sistemi sono senza soluzione e dunque B = $\varnothing$.

In conclusione, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = [\,½ , 3/2\,)$.

2. $$\begin{cases} x^2+x-2 \ge 0 \\ x+\sqrt{x^2+x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \ \text{ oppure } \ x \ge 1 \\ \sqrt{x^2+x-2} > -x \end{cases} \Leftrightarrow \ x \ge 1 \ \text{opp.} \begin{cases} x \le -2 \\ x^2+x-2 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \ge 1 \ \text{opp.} \begin{cases} x \le -2 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \ x \in [\,1 , +\infty\,) .$$

3. Per n = 1 , si ottiene $2 \cdot 2 = 1 \cdot 2^2$, che è vera.

Supponiamo l'identità vera per n arbitrario e deduciamola per n+1: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} 2^k (1+k) = (n+1)\, 2^{n+2}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k (1+k) = \sum_{k=1}^{n} 2^k (1+k) + 2^{n+1}(2+n) = n\,2^{n+1} + (n+2)\,2^{n+1} =$$

$$= 2\,(n+1)\,2^{n+1} = (n+1)\,2^{n+2}$$

4.

(i) Poiché $\log\dfrac{n+1}{n+2} = \log\dfrac{n+2-1}{n+2} = \log\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)$ (*) , da quest'ultima espressione è facile dedurre che la successione è crescente. Utilizzando la definizione di successione crescente, dobbiamo invece provare che è

$$\log\frac{n+2}{n+3} > \log\frac{n+1}{n+2} \quad , \ \forall \ n \in N \ .$$

La disequazione equivale successivamente a

$$\frac{n+2}{n+3} > \frac{n+1}{n+2} \Leftrightarrow (n+2)^2 > (n+1)(n+3) \Leftrightarrow n^2+4n+4 > n^2+4n+3 \Leftrightarrow 4 > 3 \ .$$

(ii) Per una successione crescente il valore minimo è quello per n = 1 , cioè min $a_n = \log(2/3)$. Quando esiste il minimo , l'estremo inferiore coincide con questo e dunque inf $a_n = \log(2/3)$.

(iii) Una successione crescente non assume mai valore massimo; infatti il massimo è un valore $x_{\bar{n}}$ assunto per un certo indice $\bar{n}$, ma nel caso di successione crescente risulta $x_n > x_{\bar{n}} \quad \forall\, n > \bar{n}$, e questo contraddice la definizione di massimo.

(iv) Dall'espressione (*) è facile capire che 0 è il valore a cui i termini della successione si avvicinano arbitrariamente , senza mai arrivarci. Per verificare che sup $a_n = 0$ utilizzando la definizione , dobbiamo provare :

- $\log \dfrac{n+1}{n+2} \leq 0 \quad \forall\, n \in N$

La disequazione equivale a $\dfrac{n+1}{n+2} \leq 1$, cioè a $n+1 \leq n+2$ che è vera $\forall\, n \in N$.

- $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; , \; \exists\, \bar{n} \in N : \; \log \dfrac{\bar{n}+1}{\bar{n}+2} > -\varepsilon$

La disequazione equivale successivamente a

$$\frac{n+1}{n+2} > e^{-\varepsilon} \Leftrightarrow n+1 > n\, e^{-\varepsilon} + 2\, e^{-\varepsilon} \Leftrightarrow n\,(1-e^{-\varepsilon}) > (2\, e^{-\varepsilon} - 1) \Leftrightarrow n > \frac{2\, e^{-\varepsilon} - 1}{1 - e^{-\varepsilon}}$$

(L'ultimo passaggio è lecito , perché $1 - e^{-\varepsilon} > 0$) .

Soluzioni della prova parziale n.1 del 2 . 11 . 05 *Fila 2*

1. $\dfrac{x-2}{3x-4} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 3x-4 < 0 \end{cases}$ opp. $\begin{cases} x-2 \le 0 \\ 3x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x < 4/3 \end{cases}$ opp. $\begin{cases} x \le 2 \\ x > 4/3 \end{cases}$

Il primo sistema non ha soluzioni , il secondo fornisce $x \in (4/3 , 2]$; dunque $A = (4/3 , 2]$.

$$\frac{x-4}{|x+2|} \ge 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ x-4 \ge 3(x+2) \end{cases} \text{ opp. } \begin{cases} x+2 < 0 \\ x-4 \ge 2(-x-2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > -2 \\ 2x \le -10 \end{cases} \text{ opp. } \begin{cases} x < -2 \\ 4x \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \le -5 \end{cases} \text{ opp. } \begin{cases} x < -2 \\ x \ge -1/2 \end{cases}$$

Entrambi i sistemi sono senza soluzione e dunque $B = \varnothing$.

In conclusione, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = (4/3 , 2]$.

2. $\begin{cases} x^2 + 5x + 6 \ge 0 \\ 2x + \sqrt{x^2+5x+6} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -3 \text{ oppure } x \ge -2 \\ \sqrt{x^2+5x+6} > -2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$x > 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \le -3 \text{ opp. } -2 \le x \le 0 \\ x^2+5x+6 > 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \le -3 \text{ opp. } -2 \le x \le 0 \\ 3x^2 - 5x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x > 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \le -3 \text{ opp. } -2 \le x \le 0 \\ \dfrac{5-\sqrt{97}}{6} < x < \dfrac{5+\sqrt{97}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \text{ oppure } \frac{5-\sqrt{97}}{6} < x \le 0 \Leftrightarrow$$

$x \in [(5-\sqrt{97})/6 , +\infty)$.

3. Per $n = 1$, si ottiene $3 \cdot 3 = 1 \cdot 3^2$, che è vera.

Supponiamo l'identità vera per n arbitrario e deduciamola per n+1: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} 3^k (1+2k) = (n+1)\, 3^{n+2}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} 3^k (1+2k) = \sum_{k=1}^{n} 3^k (1+2k) + 3^{n+1}(3+2n) = n\,3^{n+1} + (2n+3)3^{n+1} =$$

$$= (3n+3)3^{n+1} = 3(n+1)3^{n+1} = (n+1)3^{n+2}$$

4.

(i) Poiché $\log\dfrac{n+2}{n+3} = \log\dfrac{n+3-1}{n+3} = \log\left(1-\dfrac{1}{n+3}\right)$ (*) , da quest'ultima espressione è facile dedurre che la successione è crescente. Utilizzando la definizione di successione crescente, dobbiamo invece provare che è

$$\log\frac{n+3}{n+4} > \log\frac{n+2}{n+3} \quad , \quad \forall\, n \in N \ .$$

La disequazione equivale successivamente a

$$\frac{n+3}{n+4} > \frac{n+2}{n+3} \Leftrightarrow (n+3)^2 > (n+2)(n+4) \Leftrightarrow n^2+6n+9 > n^2+6n+8 \Leftrightarrow 9>8 \; .$$

(ii) Per una successione crescente il valore minimo è quello per n = 1 , cioè min a_n = log (3 / 4) . Quando esiste il minimo , l'estremo inferiore coincide con questo e dunque inf a_n = log (3 / 4) .

(iii) Una successione crescente non assume mai valore massimo; infatti il massimo è un valore $x_{\bar{n}}$ assunto per un certo indice $\bar{n}$, ma nel caso di successione crescente risulta $x_n > x_{\bar{n}} \quad \forall n > \bar{n}$, e questo contraddice la definizione di massimo.

(iv) Dall'espressione (*) è facile capire che 0 è il valore a cui i termini della successione si avvicinano arbitrariamente , senza mai arrivarci. Per verificare che sup a_n = 0 utilizzando la definizione , dobbiamo provare :

- $\log \frac{n+2}{n+3} \leq 0 \quad \forall n \in N$

La disequazione equivale a $\frac{n+2}{n+3} \leq 1$, cioè a $n+2 \leq n+3$ che è vera $\forall n \in N$.

- $\forall \varepsilon > 0 \; , \exists \bar{n} \in N : \log \frac{\bar{n}+2}{\bar{n}+3} > -\varepsilon$

La disequazione equivale successivamente a

$$\frac{n+2}{n+3} > e^{-\varepsilon} \Leftrightarrow n+2 > n\,e^{-\varepsilon} + 3e^{-\varepsilon} \Leftrightarrow n(1-e^{-\varepsilon}) > (3e^{-\varepsilon}-2) \Leftrightarrow n > \frac{3e^{-\varepsilon}-2}{1-e^{-\varepsilon}}$$

(L'ultimo passaggio è lecito , perché $1-e^{-\varepsilon} > 0$) .

Soluzioni della prova parziale n.1 del 2 . 11 . 05 *Fila 3*

1. $$\frac{x-3}{3x-5} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \ge 0 \\ 3x-5 < 0 \end{cases} \text{opp.} \begin{cases} x-3 \le 0 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x < 5/3 \end{cases} \text{opp.} \begin{cases} x \le 3 \\ x > 5/3 \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni , il secondo fornisce $x \in (5/3 , 3]$; dunque $A = (5/3 , 3]$.

$$\frac{x-6}{|x+3|} \ge 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > 0 \\ x-6 \ge 4(x+3) \end{cases} \text{opp.} \begin{cases} x+3 < 0 \\ x-6 \ge 4(-x-3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > -3 \\ x \le -6 \end{cases} \text{opp.} \begin{cases} x < -3 \\ x \ge -6/5 \end{cases}$$

Entrambi i sistemi sono senza soluzione e dunque $B = \varnothing$.

In conclusione, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = (5/3 , 3]$.

2. $$\begin{cases} x^2 - x - 6 \ge 0 \\ 3x + \sqrt{x^2 - x - 6} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -2 \text{ oppure } x \ge 3 \\ \sqrt{x^2 - x - 6} > -3x \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3 \text{ opp.} \begin{cases} x \le -2 \\ x^2 - x - 6 > 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x \ge 3 \text{ opp.} \begin{cases} x \le -2 \\ 8x^2 + x + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3 \text{ opp.} \begin{cases} x \le -2 \\ \text{mai verificata} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3 , +\infty) .$$

3. Per $n = 1$, si ottiene $4 \cdot 4 = 1 \cdot 4^2$, che è vera.

Supponiamo l'identità vera per n arbitrario e deduciamola per n+1: $\sum_{k=1}^{n+1} 4^k (1+3k) = (n+1)\, 4^{n+2}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} 4^k (1+3k) = \sum_{k=1}^{n} 4^k (1+3k) + 4^{n+1}(4+3n) = n\,4^{n+1} + (4+3n)\,4^{n+1} =$$

$$= 4\,(n+1)\,4^{n+1} = (n+1)\,4^{n+2}$$

4.

(i) Poiché $\log\frac{n+3}{n+4} = \log\frac{n+4-1}{n+4} = \log\left(1 - \frac{1}{n+4}\right)$ (*) , da quest'ultima espressione è facile dedurre che la successione è crescente. Utilizzando la definizione di successione crescente, dobbiamo invece provare che è

$$\log\frac{n+4}{n+5} > \log\frac{n+3}{n+4} \quad , \quad \forall\ n \in N \ .$$

La disequazione equivale successivamente a

$$\frac{n+4}{n+5} > \frac{n+3}{n+4} \Leftrightarrow (n+4)^2 > (n+3)(n+5) \Leftrightarrow n^2 + 8n + 16 > n^2 + 8n + 15 \Leftrightarrow 16 > 15 \ .$$

(ii) Per una successione crescente il valore minimo è quello per n = 1 , cioè $\min a_n = \log(4/5)$.
Quando esiste il minimo , l'estremo inferiore coincide con questo e dunque $\inf\ a_n = \log(4/5)$.

(iii) Una successione crescente non assume mai valore massimo; infatti il massimo è un valore $x_{\bar{n}}$ assunto per un certo indice $\bar{n}$, ma nel caso di successione crescente risulta $x_n > x_{\bar{n}} \quad \forall\, n > \bar{n}$, e questo contraddice la definizione di massimo.

(iv) Dall'espressione (*) è facile capire che 0 è il valore a cui i termini della successione si avvicinano arbitrariamente , senza mai arrivarci. Per verificare che sup $a_n = 0$ utilizzando la definizione , dobbiamo provare :

- $\log \dfrac{n+3}{n+4} \le 0 \quad \forall\, n \in N$

La disequazione equivale a $\dfrac{n+3}{n+4} \le 1$, cioè a $n+3 \le n+4$ che è vera $\forall\, n \in N$.

- $\forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists\, \bar{n} \in N : \ \log \dfrac{\bar{n}+3}{\bar{n}+4} > -\varepsilon$

La disequazione equivale successivamente a

$$\frac{n+3}{n+4} > e^{-\varepsilon} \Leftrightarrow n+3 > n\,e^{-\varepsilon} + 4\,e^{-\varepsilon} \Leftrightarrow n\,(1-e^{-\varepsilon}) > (4\,e^{-\varepsilon}-3) \Leftrightarrow n > \frac{4\,e^{-\varepsilon}-3}{1-e^{-\varepsilon}}$$

(L'ultimo passaggio è lecito , perché $1-e^{-\varepsilon} > 0$) .

Soluzioni della prova parziale n.1 del 2 . 11 . 05 *Fila 4*

1. $\dfrac{3x-4}{5x-6} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 \ge 0 \\ 5x-6 < 0 \end{cases}$ opp. $\begin{cases} 3x-4 \le 0 \\ 5x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4/3 \\ x < 6/5 \end{cases}$ opp. $\begin{cases} x \le 4/3 \\ x > 6/5 \end{cases}$

Il primo sistema non ha soluzioni , il secondo fornisce $x \in (6/5 , 4/3]$; dunque $A = (6/5 , 4/3]$

$$\frac{x-2}{|x+4|} \ge 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 > 0 \\ x-2 \ge 2(x+4) \end{cases} \text{ opp. } \begin{cases} x+4 < 0 \\ x-2 \ge 2(-x-4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > -4 \\ x \le -10 \end{cases} \text{ opp. } \begin{cases} x < -4 \\ x \ge -2 \end{cases}$$

Entrambi i sistemi sono senza soluzione e dunque $B = \emptyset$.

In conclusione, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = (6/5 , 4/3]$.

2. $\begin{cases} x^2 + x - 12 \ge 0 \\ 4x + \sqrt{x^2 + x - 12} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -4 \text{ oppure } x \ge 3 \\ \sqrt{x^2 + x - 12} > -4x \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3$ opp. $\begin{cases} x \le -4 \\ x^2 + x - 12 > 16x^2 \end{cases}$

$x \ge 3$ opp. $\begin{cases} x \le -4 \\ 15x^2 - x + 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3$ opp. $\begin{cases} x \le -4 \\ \text{mai verificata} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3, +\infty)$.

3. Per $n = 1$, si ottiene $5 \cdot 5 = 1 \cdot 5^2$, che è vera.

Supponiamo l'identità vera per n arbitrario e deduciamola per n+1: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} 5^k (1+4k) = (n+1)\, 5^{n+2}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} 5^k (1+4k) = \sum_{k=1}^{n} 5^k (1+4k) + 5^{n+1}(5+4n) = n\,5^{n+1} + (5+4n)\,5^{n+1} =$$

$$= 5\,(n+1)\,5^{n+1} = (n+1)\,5^{n+2}$$

4.

(i) Poiché $\log\dfrac{n+4}{n+5} = \log\dfrac{n+5-1}{n+5} = \log\left(1 - \dfrac{1}{n+5}\right)$ (*) , da quest'ultima espressione è facile dedurre che la successione è crescente. Utilizzando la definizione di successione crescente, dobbiamo invece provare che è

$$\log\frac{n+5}{n+6} > \log\frac{n+4}{n+5} \quad , \ \forall\ n \in N \ .$$

La disequazione equivale successivamente a

$$\frac{n+5}{n+6} > \frac{n+4}{n+5} \Leftrightarrow (n+5)^2 > (n+4)(n+6) \Leftrightarrow n^2 + 10n + 25 > n^2 + 10n + 24 \Leftrightarrow 25 > 24 \ .$$

(ii) Per una successione crescente il valore minimo è quello per n = 1 , cioè $\min a_n = \log(5/6)$.
Quando esiste il minimo , l'estremo inferiore coincide con questo e dunque $\inf a_n = \log(5/6)$.

(iii)   Una successione crescente non assume mai valore massimo; infatti il massimo è un valore $x_{\bar{n}}$ assunto per un certo indice $\bar{n}$, ma nel caso di successione crescente risulta $x_n > x_{\bar{n}} \quad \forall\, n > \bar{n}$, e questo contraddice la definizione di massimo.

(iv)   Dall'espressione (*) è facile capire che 0 è il valore a cui i termini della successione si avvicinano arbitrariamente , senza mai arrivarci. Per verificare che sup $a_n = 0$ utilizzando la definizione , dobbiamo provare :

- $\log \dfrac{n+4}{n+5} \le 0 \quad \forall\, n \in N$

La disequazione equivale a $\dfrac{n+4}{n+5} \le 1$, cioè a $n+4 \le n+5$ che è vera $\forall\, n \in N$.

- $\forall\, \varepsilon > 0 \;,\; \exists\, \bar{n} \in N :\; \log \dfrac{\bar{n}+4}{\bar{n}+5} > -\varepsilon$

La disequazione equivale successivamente a

$$\frac{n+4}{n+5} > e^{-\varepsilon} \Leftrightarrow n+4 > n\,e^{-\varepsilon} + 5\,e^{-\varepsilon} \Leftrightarrow n\,(1-e^{-\varepsilon}) > (5\,e^{-\varepsilon} - 4) \Leftrightarrow n > \frac{5\,e^{-\varepsilon}-4}{1-e^{-\varepsilon}}$$

(L'ultimo passaggio è lecito , perché $1-e^{-\varepsilon} > 0$) .