Soluzioni

1.1

(a) Almeno uno studente del corso non abita a Pisa.
(b) Tutti gli studenti passeranno il corso con 30 o 30 e lode.
(c) Almeno una studentessa del corso non ha occhi celesti o non ha capelli biondi.
(d) C'è almeno un docente che non è all'estero e non svolge alcun incarico.
(e) A è un insieme di numeri reali limitato superiormente, cioè i suoi elementi non possono superare una determinata soglia. La negazione di questa proposizione afferma che qualunque numero reale si scelga, si può trovare un numero in A che sia maggiore o uguale a questo: $\forall\ M \in \mathbf{R} :\ \exists\ x \in A \subset \mathbf{R} :\ x \geq M$.
Ad esempio, $A = (0, 1)$ è limitato superiormente, $A = (0, +\infty)$ non lo è.
(f) Comunque si scelga un numero in A è possibile trovare un numero reale maggiore di questo; l'affermazione è vera qualunque sia l'insieme A (purché non vuoto).
La sua negazione si scrive $\exists\ x \in A \subset \mathbf{R} :\ \forall\ M \in \mathbf{R} ,\ x \geq M$ e sostiene l'esistenza di un numero in A maggiore o uguale di tutti i numeri reali; questo è banalmente falso, dato che **R** non è limitato superiormente (e nemmeno inferiormente) .
(g) La proposizione afferma che la funzione f (x) data assume valori diversi in corrispondenza di valori diversi della x; una funzione siffatta si dice iniettiva. Negare questa proposizione significa affermare che esistono almeno due valori distinti di x in corrispondenza dei quali la funzione assume lo stesso valore: $\exists\ x', x'' \in A ,\ x' \neq x'' :$ $f (x') = f (x'')$.
Ad esempio, la funzione $f (x) = x^2$ è iniettiva per x che varia in $[0, +\infty)$, non lo è per x che varia in $(-\infty , +\infty)$.
(h) La proposizione afferma che la funzione f (x) data assume tutti i valori di **R**, cioè che ogni numero reale è immagine di almeno un x in A; una funzione siffatta si dice surgettiva. Negare questa proposizione significa affermare che esiste almeno un numero reale che non è assunto dalla funzione: $\exists\ y \in \mathbf{R} : \forall\ x \in \mathbf{A} :\ f (x) \neq y$.
Ad esempio, per x che varia in **R** la funzione $f (x) = x$ è surgettiva , mentre la funzione $f (x) = x^2$ non lo è.

1.2

(a) falsa : esistono numeri il cui quadrato è minore di 1 (ad es. ½)
(b) vera : esistono numeri il cui quadrato non è minore di 1
(c) vera : il quadrato di un qualsiasi numero reale non è mai negativo
(d) falsa : è la negazione della precedente proposizione
(e) vera : $x = 0$ verifica la condizione richiesta (è l'unico numero a farlo)
(f) falsa : non tutti i numeri reali sono il quadrato di un altro numero , cioè non di tutti i numeri reali si può estrarre la radice quadrata (ma solo di quelli positivi o nulli).
(g) vera : tutti i numeri reali sono il cubo di un altro numero , cioè di tutti i numeri reali si può estrarre la radice cubica.
(h) vera : esistono numeri reali che sono minori di tutti i numeri naturali (ad esempio -1)
(i) vera : comunque si fissi un numero naturale n , si può sempre trovare un numero reale che sia minore o uguale a quello (ad es. $n - 1$) .
(l) falsa : l'insieme dei numeri naturali non è limitato superiormente.
(m) vera : comunque si fissi un numero naturale n , si può sempre trovare un numero reale che sia maggiore di quello (ad es. $n + 1$) .

1.3

(a) n multiplo di 20 $\Rightarrow$ n multiplo di 4

(b) $\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

(c) $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$

(d) $x > 1 \Leftrightarrow x^3 > 1$

(e) f derivabile $\Rightarrow$ f continua, f continua $\not\Rightarrow$ f derivabile

(f) Condizione sufficiente perché f sia integrabile in [a, b] è che sia continua in [a, b].
Condizione necessaria perché f sia continua in [a , b] è che sia integrabile in [a , b] .

(g) Condizione sufficiente perché due rette siano parallele è che non si incontrino.
Condizione necessaria perché due rette non si incontrino è che siano parallele.
Nel caso di rette del piano le due affermazioni sono equivalenti , nel senso che l'una è condizione necessaria e sufficiente per l'altra (nel piano le uniche rette che non si intersecano sono quelle parallele) . Nello spazio la situazione è più complessa , perché esistono rette che non si intersecano pur non essendo parallele perché non hanno la stessa direzione (rette sghembe) .

(h) Condizione sufficiente perché x appartenga ad $A \cap B$ è che x appartenga ad A .
Condizione necessaria perché appartenga ad A è che appartenga ad $A \cap B$.
Osservare che l'implicazione **è falsa** : non è sufficiente che un elemento appartenga ad A perchè appartenga anche ad $A \cap B$, dato che non è garantito che questo elemento stia in B; analogamente non è necessario che un elemento appartenga ad $A \cap B$ perché appartenga ad A : se appartiene ad $A \cap B$, certamente appartiene anche ad A , ma potrebbe appartenere ad A senza appartenere ad $A \cap B$.

(i) Condizione sufficiente perché sia $\sqrt{(x^2 - 1)} = 2$ è che sia $x = \sqrt{5}$.
Condizione necessaria perché sia $x = \sqrt{5}$ è che sia $\sqrt{(x^2 - 1)} = 2$.
Le due affermazioni **non** sono equivalenti , nel senso che l'equazione $\sqrt{(x^2 - 1)} = 2$ non ha come soluzione soltanto $x = \sqrt{5}$, ma anche $x = -\sqrt{5}$.

1.4

(a) $B \Rightarrow A$ (b) $A \Leftrightarrow B$ (c) $A \Rightarrow B$ (d) $B \Rightarrow A$ (e) $A \Leftrightarrow B$ (f) $A \Leftrightarrow B$
(g) $B \Leftrightarrow A$ (h) $B \Leftrightarrow A$ (i) $B \Leftrightarrow A$ (l) $A \Rightarrow B$ (m) $B \Rightarrow A$ (n) $B \Rightarrow A$
(o) $A \Leftrightarrow B$ (p) $A \Leftrightarrow B$ (q) $B \Rightarrow A$ (r) $A \Leftrightarrow B$ (s) $A \Leftrightarrow B$ (t) $B \Rightarrow A$
(u) $A \Leftrightarrow B$ (v) $A \Rightarrow B$ (w) $B \Rightarrow A$ (z) $A \Leftrightarrow B$

1.5

Vere: (e), (f), (h), (i), (l); false le altre.
Si ricordi che la scrittura $x \in A$ significa che A è un insieme e x un suo elemento , mentre la scrittura $A \subset B$ significa che A e B sono due insiemi ed ogni elemento di A appartiene anche a B.

1.6

(a) $A \cup B = \{ x \in \mathbf{Q} : x \in (-3, 3) \} \cup \{ 4 \}$ $\quad A \cap B = \{ 1, 2 \}$

(b) $A \cup B = \{ x \in \mathbf{Z} : x \in [-3, 7] \}$ $\quad A \cap B = \{ 2, 3 \}$

(c) $A \cup B = B$ $\quad A \cap B = \varnothing$
(perché $A = \varnothing$)

(d) $A \cup B = \mathbf{R}$ $\quad$ $A \cap B = (-2, -1] \cup [1, 2)$

(perché $A = (-2, 2)$, $B = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$)

(e) $A \cup B = \mathbf{R}$ $\quad$ $A \cap B = (-1, -4/5) \cup (0, 5)$

(perché $A = (-1, 5)$, $B = (-\infty, -4/5) \cup (0, +\infty)$) .

1.7

(a)

$A_1 = \{ x : x > 2 \text{ e } x < 6 \} = (2, 6)$

$A_2 = \{ x : x < 0 \} = (-\infty, 0)$ $\qquad$ $A = A_1 \cup A_2 = (-\infty, 0) \cup (2, 6)$

$B_1 = \{ x : x > 2 \} = (2, +\infty)$

$B_2 = \{ x : x < 6 \} = (-\infty, 6)$ $\qquad$ $B = B_1 \cap B_2 = (2, 6)$

(b) $A = (-\infty, 0) \cup (2, 6)$ $\qquad$ $B = (-\infty, 0) \cup (2, 6)$

(c) $A = (-\infty, 1)$ $\qquad$ $B = \varnothing$

(d) $A = (-\infty, 1)$ $\qquad$ $B = (-\infty, 1)$

1.8

L'equazione è equivalente a:

$|x - 1| = 1 \iff x - 1 = 1$ oppure $x - 1 = -1 \iff x = 2$ oppure $x = 0$

Ricordarsi che $\sqrt{(x^2)} = |x|$.

1.9

La disequazione è equivalente a:

" $x^2 - 1 \geq 0$, $x < 0$ " oppure " $x^2 - 1 \geq 0$, $x \geq 0$, $x^2 - 1 \geq x^2$ " $\iff$

" $x \in (-\infty, -1]$ " oppure " $x \in \varnothing$ " $\iff$

" $x \in (-\infty, -1]$ "

In una disequazione in cui compare una radice quadrata , dopo aver dato significato alla radice , si può elevare al quadrato solo se anche l'altro termine è positivo; nel caso in cui questo sia negativo , la disequazione a seconda del suo segno sarà sicuramente verificata oppure non lo sarà mai.

1.10

(a)

- per $n = 1$ è vera

- verifichiamo che è induttiva:

$(1 + a)^{n+1} =$

$$(1 + a)^{n} (1 + a) \geq (1 + n a) (1 + a) = 1 + (n + 1) a + n a^{2} > 1 + (n + 1) a$$

(b)

- per n = 5 è vera
- verifichiamo che è induttiva:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n} > 2 n^{2} > (n + 1)^{2}$$

Infatti la seconda minorazione equivale a $n^{2} - 2 n - 1 \geq 0$ e questa è verificata per $n > (1 + \sqrt{5}) / 2$, in particolare (che è quanto a noi interessa) per $n \geq 5$.

(c)

- per n = 1 è vera
- verifichiamo che è induttiva:

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^{k} = \sum_{k=0}^{n} a^{k} + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a}$$

(d)

- per n = 1 è vera
- verifichiamo che è induttiva:

$$3^{2n+2} - 2^{n+1} = 9 \cdot 3^{2n} - 2 \cdot 2^{n} = 9 (3^{2n} - 2^{n}) + 7 \cdot 2^{n}$$

$3^{2n} - 2^{n}$ per ipotesi di induzione è multiplo di 7 e tale rimane se moltiplicato per 9; in quanto a $7 \cdot 2^{n}$, è ovviamente multiplo di 7.

(e)

- per n = 1 è vera
- verifichiamo che è induttiva:

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^{n} \geq 3 n \cdot 2^{n} .$$

Rimane da provare che è $3 n 2^{n} \geq (n + 1) 2^{n+1}$; questo equivale a $3 n \geq 2 n + 2$, cioè a $n \geq 2$.
Per completare il ragionamento , occorre dunque verificare che la proposizione data è vera anche per n = 2 . La relativa verifica è immediata ($9 \geq 8$) .

(f)

- per n = 1 è vera
- verifichiamo che è induttiva:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(2n^2+7n+6)(n+1)}{1-a} =$$

$$= \frac{2(n+2)(n+3/2)(n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

(l'uguaglianza in apertura della seconda riga segue dal fatto che il polinomio di secondo grado $2n^2 + 7n + 6$ ha come radici -2 e -3/2 e il coefficiente della potenza di grado massimo è 2).

1.11

Sono tutte vere , eccetto la (b) .

2.1

(a) $x \geq 1/3$ (b) $x < 0$ o $x \geq 1$ (c) $-3/2 \leq x < 1$
(d) $x < 1/2$ o $x > 1$ (e) $-1/2 \leq x \leq -1/3$ (f) $x \neq 3/4$
(g) nessuna soluzione (h) $-1 < x \leq 0$ o $1 < x \leq 7$
(i) $x \leq -\sqrt{3/2}$ o $-1 < x < 0$ o $1 < x \leq \sqrt{3/2}$
(l) nessuna soluzione (m) $x \leq -2$ o $x \geq 2$ (n) $x = \pm 10/3$
(o) $x > 0$ (p) $-1 < x < 1$ (q) $x < -5$ o $x > -1$
(r) $0 \leq x \leq 8$

(s) $\frac{3-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ o $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

(t) nessuna soluzione (u) $x \geq -1/2$ (v) $-1 < x \leq -1/\sqrt{2}$

(u) $x = 7/2$, $y = -2$, $z = 3/2$
(v) infinite soluzioni, che possono essere scritte ad esempio nella forma $x = t$, $y = 7/3 + t/3$, $z = -2/3 - 2t/3$, al variare di t parametro reale.

2.2

(a) parabola al di sopra dell'asse x: $a > 0$, $\Delta < 0$
(b) parabola con concavità verso il basso che interseca l'asse x per $x = -2$ e $x = 3$; ne esistono infinite, che possono essere scritte nella forma $y = a(x+2)(x-3)$ con $a < 0$ ovvero $y = a x^2 - a x - 6a$ con $a < 0$
(c) parabola al di sotto dell'asse x: $a < 0$, $\Delta < 0$
(d) parabola con concavità verso l'alto che interseca l'asse x per $x = 1$ e $x = 5$; ne esistono infinite, che possono essere scritte nella forma $y = a(x-1)(x-5)$ con $a > 0$ ovvero $y = a x^2 - 6 a x + 5a$ con $a > 0$.

3.1

(a) $\sqrt[12]{5^6}$, $\sqrt[12]{3^3}$, $\sqrt[12]{2^2}$

(b) $\sqrt[30]{2^{10}}$, $\sqrt[30]{3^6}$, $\sqrt[30]{5^3}$

(c) $\sqrt[12]{a^6}$, $\sqrt[12]{a^5}$, $\sqrt[12]{a^9}$ $(a \geq 0)$

(d) $\sqrt[30]{(x-y)^{10}}$, $\sqrt[30]{(x+y)^{6}}$, $\sqrt[30]{(x^2-y^2)^{15}}$ (se $x-y \geq 0$, $x+y \geq 0$)

$-\sqrt[30]{(x-y)^{10}}$, $-\sqrt[30]{(x+y)^{6}}$, $\sqrt[30]{(x^2-y^2)^{15}}$ (se $x-y \leq 0$, $x+y \leq 0$)

3.2

Ricordarsi che la radice quadrata è definita quando il termine sotto radice è una quantità maggiore o uguale a 0

(a) $-1 \leq x \leq 1$ (b) sempre (c) sempre

(d) $x \leq 0$ (e) $x \leq 0$ o $x \geq 5$ (f) $x \leq 1$

3.3

(a) $5\,|x|/y^2$, $y \neq 0$ (b) $2\,|x-1|/|y|$, $y \neq 0$

(c) $((x-1)/y)^2$, $y \neq 0$ (d) $x/(x-1)^2$, $x \neq 1$

(e) $\sqrt[4]{x-1}/\sqrt{x}$, $x \geq 1$ (f) $x/\sqrt{x-1}$, $x > 1$

(g) $|x|^3\sqrt{y^3}$, $y \geq 0$ (h) $\sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$

(i) $\sqrt[6]{2x-1}$, $x \geq 1/2$ (l) $\sqrt[12]{5/x}$, $x > 0$

(m) $x\sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ (n) $\sqrt{x}\,|x-1|$, $x \geq 0$

(o) $\sqrt[4]{x+3}\,|x|$, $x \geq -3$ (p) $(x+1)\sqrt{x-1}$, $x \geq 1$

(q) $(x^2+1)/|x|$, $x \neq 0$

3.4

(a) $\sqrt{x^2+x}$, $x \geq 0$ (b) $\sqrt{9-x^2}$, $x \in [-3,3]$

(c) $x\sqrt[3]{x+2}$, $x \in R$ (d) x , $x \geq 0$

(e) $\sqrt[6]{(3x-4)^3\,x^4}$, $x \geq 4/3$ (f) $\sqrt[3]{x^5}$, $x \in R$

(g) $\sqrt{(3x-1)\,x}$, $x \geq 1$ (h) $1/\sqrt{x+1}$, $x > 1$

(i) $\sqrt[4]{x/(3(x+2))}$, $x \geq 0$ (l) $1/\sqrt{x}$, $x > 0$

3.5

(a) $x \geq 0$ (b) $x \leq 0$ (c) sempre (d) $x \geq 0$

(e) $-1 \leq x \leq 0$ (f) $x \geq 1$ (g) sempre (h) $x \geq -1$

(i) $x \leq 2$ o $x \geq 5$ (l) $0 \leq x \leq 1$ (m) $-1 \leq x \leq 1$ (n) $x \leq -2$ o $x \geq 2$

(o) sempre (p) $-1 \leq x \leq 1$ (q) $-1 \leq x \leq 0$ (r) mai

(s) sempre (t) $x \geq -1$

3.6

(a) L'espressione si può riscrivere nella forma

$$\frac{|x| \sqrt{1 - x^2}}{x \sqrt[3]{x - 1}}$$

ed è definita per $x \in [-1, 0) \cup (0, 1)$.

Per $x \in (0, 1)$ si può ulteriormente scrivere $\dfrac{\sqrt{1-x}\ \sqrt{1+x}}{-\sqrt[3]{1-x}} = -\sqrt[6]{1-x}\ \sqrt{1+x}$;

per $x \in [-1, 0)$ si ha invece $\dfrac{\sqrt{1-x}\ \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1-x}} = \sqrt[6]{1-x}\ \sqrt{1+x}$.

(b) L'espressione si può riscrivere nella forma

$$\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{x(x - 1)}}$$

ed è definita per $x \in [-1, 0)$.

Si può ulteriormente scrivere $\dfrac{\sqrt{1-x}\ \sqrt{1+x}}{\sqrt{-x}\ \sqrt{1-x}} = \sqrt{-\dfrac{1+x}{x}}$.

(c) L'espressione si può riscrivere nella forma

$$\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{x(1 - x)}}$$

ed è definita per $x \in (0, 1)$.

Si può ulteriormente scrivere $\dfrac{\sqrt{1-x}\ \sqrt{1+x}}{\sqrt{x}\ \sqrt{1-x}} = \sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$

3.7

Per risolvere un'equazione della forma $\sqrt{\ P(x)} = Q(x)$, dopo aver trovato il campo di esistenza delle espressioni $P(x)$ e $Q(x)$, occorre dare significato alla radice imponendo che sia $P(x) \geq 0$. Il passo successivo consiste nell'elevare al quadrato ambo i membri dell'equazione, in modo da togliere la radice e poi concludere i calcoli. Per poter procedere in questo modo , occorre imporre che sia $Q(x) \geq 0$ in modo che i due membri dell'equazione abbiano lo stesso segno. I valori della variabile x che rendono $Q(x) < 0$ non interessano, perché sicuramente non sono soluzioni dell'equazione.
Per risolvere una disequazione della forma $\sqrt{\ P(x)} > Q(x)$ oppure $\sqrt{\ P(x)} \geq Q(x)$, si procede in modo analogo : si dà significato alle espressioni $P(x)$ e $Q(x)$ e alla radice , poi si eleva al quadrato e si concludono i calcoli , ma solo sotto l'ulteriore ipotesi che sia $Q(x) \geq 0$. Stavolta però i valori della variabile che rendono $Q(x) < 0$ non devono essere trascurati , perché per questi valori la disequazione è sicuramente verificata (infatti in questo caso il primo membro è positivo , mentre il secondo è negativo).
Se la disequazione è invece della forma $\sqrt{\ P(x)} < Q(x)$ oppure $\sqrt{\ P(x)} \leq Q(x)$, si procede come nel caso precedente; adesso però i valori della variabile che rendono $Q(x) < 0$ non interessano , perché sicuramente non risolvono la disequazione (il primo membro che è positivo non può essere minore del secondo membro che invece è negativo) .

Nota: d'ora in poi chiameremo campo di esistenza (C.E.) di una equazione (o disequazione o funzione) l'insieme dei valori da attribuire alla variabile perché l'equazione (o la disequazione o la funzione) abbia senso .

(a) $x = 2/3$

C.E. : $x \geq 1/3$
Poiché nel C.E. il primo membro è positivo, possiamo elevare al quadrato : l'equazione assume la forma equivalente $9x^2 - 12x + 4 = 0$, che fornisce $x = 2/3$. Il valore trovato sta nel C.E. quindi è la soluzione (unica) dell'equazione.

(b) nessuna soluzione

C.E. : $x \geq 3$
Elevando al quadrato , si ottiene che deve essere $x \leq -2$; poiché nessuno di questi valori sta nel C.E. , la disequazione non ha soluzioni.

(c) $x \in \left((3 + \sqrt{17})/2 , + \infty \right)$

C.E. : $x \geq -2/3$.
I valori negativi di x non risolvono la disequazione (il primo membro positivo non può essere minore del secondo negativo). Per $x \geq 0$ possiamo elevare al quadrato , ottenendo $x^2 - 3x - 2 > 0$. Le soluzioni accettabili sono quelle maggiori di $(3 + \sqrt{17})/2$ (le soluzioni minori di $(3 - \sqrt{17})/2$ sono da scartare) .

(d) $x = 1$

C.E. : R .
Prima di elevare al quadrato , imponiamo che il primo membro sia positivo con la condizione $x \geq 1/5$. L'equazione $25x^2 - 10x + 1 = |10x + 6|$, tenendo conto della condizione imposta , si semplifica in $25x^2 - 10x + 1 = 10x + 6$; l'unica soluzione ammissibile è $x = 1$.

(e) $x \in \left(\dfrac{1 - \sqrt{13}}{2} , \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)$

C.E. : $x \geq 2 / 3$.
Possiamo elevare al quadrato , ottenendo $x^2 - x - 3 < 0$ ….

(f) $x \in \left[\dfrac{2}{3} , 6 \right)$

C.E. : $x \geq 2 / 3$. .
Per $2 / 3 \leq x < 2$ la disequazione è verificata ; per $x \geq 2$ possiamo elevare al quadrato : la disequazione che si deduce $x^2 - 7x + 6 < 0$ è verificata per $1 < x < 6$, ovvero – tenendo conto della condizione che abbiamo imposto – per $2 \leq x < 6$. In conclusione la disequazione di partenza è verificata per $2 / 3 \leq x < 6$.

(g) $x \in (1 , +\infty)$

C.E. : $x \in (-\infty , -2] \cup (1 , +\infty)$.
Elevando al quadrato , si ottiene $(x + 2) / (x - 1) > 1$ ovvero $3 / (x - 1) > 0$, che fornisce le soluzioni $x > 1$.

(h) $x \in (-1 / 2, 1) \cup (1, +\infty)$

C.E. : $x \neq 1$
Elevando al quadrato : $| (x + 2) / (x - 1) | > 1$, ovvero : $| x + 2 | > | x - 1 |$; a questo punto , invece di distinguere i vari casi a seconda del segno delle quantità sotto valore assoluto , possiamo ulteriormente elevare al quadrato, ottenendo (dopo opportune semplificazioni) $2x + 1 > 0$ ….

(i) $x \in \left[\dfrac{5 - \sqrt{13}}{2} , 1 \right)$

Studiamo la prima disequazione , che riscriviamo come $\sqrt{1 + 2x - 3x^2} > 1 - x$.
C.E. : $x \in [-1 / 3 , 1]$.
Poiché il secondo membro è positivo , possiamo elevare al quadrato : dopo qualche semplificazione , si ottiene $x^2 - x < 0$ che fornisce $0 < x < 1$.

Consideriamo adesso la seconda disequazione : $\sqrt{x + 1} \geq 2 - x$.
C.E. : $x \in [-1 , +\infty)$.
Se $x > 2$, è verificata ; se $-1 \leq x \leq 2$ si ottiene (elevando al quadrato e semplificando) $x^2 - 5x + 3 \leq 0$. Tenendo conto della condizione imposta, si trova $(5 - \sqrt{13}) / 2 \leq x \leq 2$.
La seconda disequazione è dunque verificata per $x \geq (5 - \sqrt{13}) / 2$.

In conclusione , il sistema è soddisfatto per $(5 - \sqrt{13}) / 2 \leq x < 1$.

(l) $x \in [-1 , 1)$

Studiamo la prima disequazione .
C.E. : $x \in (-3 , +\infty)$.

Togliendo il denominatore , possiamo riscrivere $\sqrt{x^2 + 3x} < x + 1$.
Se $-3 < x < -1$, la disequazione non è verificata. Se $x \geq -1$, elevando al quadrato si trova $x < 1$.
La prima disequazione è dunque verificata per $-1 \leq x < 1$.

La seconda disequazione è sempre definita. Togliendo il valore assoluto , si trova che deve essere $x^2 - 8x + 10 > 3$ oppure $x^2 - 8x + 10 < -3$, cioè $x^2 - 8x + 7 > 0$ oppure $x^2 - 8x + 13 < 0$. Procedendo con i calcoli , si trova che deve essere $x < 1$ oppure $4 - \sqrt{3} < x < 4 + \sqrt{3}$ oppure $x > 7$.

Il sistema è dunque verificato per $-1 \leq x < 1$.

(m) $x \in [0 , 1 / 3]$

C.E. : $x \in (-\infty , 1 / 3]$
Se $x < - 1 / 3$ la disequazione non è verificata .
Se $- 1 / 3 \leq x \leq 1 / 3$, possiamo elevare alla sesta ambo i membri ; sviluppando i calcoli , si trova $x (9x^2 - 6x + 5) \geq 0$. Il termine entro parentesi è sempre positivo , quindi deve essere $x \geq 0$. Tenendo conto della condizione imposta , si trova $0 \leq x \leq 1 / 3$.

(n) $x \in [-1 , +\infty)$

C.E. : $x \in [-1 , +\infty)$

Elevando al quadrato ambo i membri , si ottiene $2 \sqrt{x^2 + 3x + 2} > 2 - x$.
Per $x > 2$ la disequazione è verificata . Per $-1 \leq x \leq 2$ eleviamo al quadrato , trovando $3x^2 + 16x + 4 > 0$. Nell'intervallo considerato la disequazione è verificata (tralasciamo i consueti calcoli) .

4.1

Si ricordi che $\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$. Inoltre l'espressione $\log_a b$ ha senso solo se $b > 0$ e se $a > 0$, $a \neq 1$.

(a) 3	(b) 0	(c) 1	(d) $\sqrt[4]{2}$	(e) 3/ 2
(f) - 2	(g) -2	(h) 1 / 2	(i) 2	(l) -1/2

Le espressioni (m) ed (n) non hanno significato .

4.2

(a) $\log 4 / \log 2 = 2$ (b) $1 / \log 10$ (c) $-\log 4 / \log 2 = -2$

(d) $\log 2 / \log x$ (e) $\log x / \log x = 1$ (d) $\log x / 2 \log x = 1/2$

Le ultime tre uguaglianze valgono per $x > 0$, $x \neq 1$.

4.3

(a) $x > -1$ (b) $x \neq -1$ (c) $x < 0$ (d) $x > 0, x \neq 1$

(e) $x > 1/e$ (f) $1 < x < 1 + e$ (g) $x > 0, x \neq 1$ (h) $x > e$

(i) $x > 0, x \neq 5$ (l) $x < -2$ o $x > 1$ (m) mai (n) $x < -1/\sqrt[3]{2}$ o $x > 1/\sqrt[3]{2}$

4.4

(a) $2 \log |x|$ (b) $2 (\log 2 + \log |x|)$ (c) $3 \log x$

(d) $1 - \log x$ (e) x (f) $\log x + 2 \log |x - 1|$

(g) $\log |x - 1| - \log |x + 2|$ (h) $-\log x$ (i) non semplificabile

(l) non semplificabile (m) non semplificabile (n) $(\log |x + 1| - \log |x + 1|) / 2$

4.5

(a) $1 / 4^x$ (b) $1 / 2^{x^2/2}$ (c) $2 (3^x) - 1$

(d) $3 (3^{x^2} - 3^x)$ (e) $1 / 2^{x+1}$ (f) 2^{x-1}

4.6

(a) $x = 27$.

C.E. : $x > 0$. Si può riscrivere l'equazione nella forma equivalente $3^{\log_3 x} = 3^3$ ed osservare che il primo membro vale x.

(b) $x = 4$.

C.E. : $x > 0$.

Utilizzando la formula di cambiamento di base $\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = \dfrac{1}{2} \log_2 x$, l'equazione si riscrive nella forma $3/2 \log x = 3$, cioè $\log_2 x = 2$, e da questa – procedendo come nell'esercizio precedente – si ricava la soluzione.

(c) $x = 1$.

C.E. : $x > 0$.

Basta osservare che l'equazione si può riscrivere come $\log_3 x (x + 1) = \log_3 2$, cioè $x (x + 1) = 2$.

(d) $x = e^{-5}$

(e) nessuna soluzione

C.E. : $x < 3$

Possiamo riscrivere l'equazione nella forma $\log_2 \dfrac{3 - x}{(5 - x)^2} = -1$ da cui segue che deve essere $\dfrac{3 - x}{(5 - x)^2} = \dfrac{1}{2}$ ……

(f) $x = \pm e^{-3}$

(g) $x = \sqrt[3]{2}$ $x = \sqrt[3]{2}$

(h) $-4 + 2\sqrt{6} \le x < 1$

C.E. : $x > 0 , x \neq 1 , 9 - 8x - x^2 > 0 \leftrightarrow x \in (0 , 1)$
Tenendo conto del C.E., la disequazione equivale a $9 - 8x - x^2 \le 1$ ……

(i) $x = \sqrt[5]{2}$

C.E. : $x > 0 , x \neq 1$
Possiamo riscrivere l'equazione nella forma $2x = (x^2)^3$, cioè $2x = x^6$ …..
Oppure, cambiando base: $\log 2x / \log x^2 = 3 \leftrightarrow \log 2 + \log x = 6 \log x \leftrightarrow \log x^5 = \log 2$ ….

(l) $x = \pm 3$

(m) nessuna soluzione

Per il C.E. deve essere $x > 0$, $\log_{1/2} x > 0$, $\log_2 x > 0$. Poiché $\log_{1/2} x = - \log_2 x$, le due condizioni sui logaritmi sono incompatibili e dunque l'equazione non ha senso.

(n) $x \in (1 - \sqrt{14}\ , 1 + \sqrt{14}) - \{-1, 3\}$

C.E. : $x \neq -1 , x \neq 3$
Si riscrive l'equazione nella forma $\log_{10} | (x + 1) (x - 3) | < 1$, da cui segue che deve essere $| x^2 - 2x - 3 | < 10$ cioè $x^2 - 2x - 13 < 0$ e $x^2 - 2x + 7 > 0$.

(o) nessuna soluzione

C.E. : $x \ge 1$; infatti deve essere $\begin{cases} x^2 \ge 1 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases}$. Per $x \le -1$ la seconda disequazione è impossibile , mentre per $x \ge 1$ è sempre verificata.

La disequazione data equivale a $x - \sqrt{x^2 - 1} > 1$, cioè $\sqrt{x^2 - 1} < x - 1$ che nel C.E. trovato non ha soluzioni , come si stabilisce elevando al quadrato ambo i membri.

(p) $-3 < x < -1$ o $x > 2$

C.E. : $x < -1$ o $x > 2$.

Poiché $\log_{1/2} a = -\log_2 a$, la disequazione equivale a $\dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ cioè a

$\dfrac{-x-3}{(x-1)(x^2-2)} < 0$ .....

(q) $x \geq e^{-1}$

(r) $x \geq (1 + \sqrt{5})/2$

C.E. : $x > 1$

Riscriviamo la disequazione come $-\log_2(x-1) \leq \log_2 x \leftrightarrow \log_2(x^2 - x) \geq 0 \leftrightarrow$ $x^2 - x - 1 \geq 0$ ….

(s) $-\sqrt{8} < x < -\sqrt{6}$ o $\sqrt{6} < x < \sqrt{8}$

C.E.: $x < -\sqrt{6}$ o $x > \sqrt{6}$

Deve essere $0 < \log_3(x^2 - 5) < 1 \leftrightarrow 1 < x^2 - 5 < 3$ ….

(t) $-3 < x < -\sqrt{6}$ o $\sqrt{6} < x < 3$.

4.7

(a) $x = 2$ (b) $x = 0$

(c) $x = \log_7 2$

Basta prendere il logaritmo in base 7 di ambo i membri.

(d) $x = \log 2 / (2 \log 2 - \log 3)$

Si riscrive l'equazione come $(4/3)^x = 2$, da cui segue $x = \log_{4/3} 2 = \log 2 / \log 4/3$ $= \log 2 / (2 \log 2 - \log 3)$.

(e) $x = \log 3 / (\log 10 - \log 3)$

(f) $1 < x < 3$

Riscriviamo $(1/2)^{x^2+3} > (1/2)^{4x}$; poiché la funzione $(1/2)^x$ decresce , la disequazione equivale a $x^2 + 3 < 4x$ ….

(g) $x > \log_{15} 5/3 = (\log 5 - \log 3) / (\log 5 + \log 3)$

(h) $x \geq (1 - \log_{3/4} 2)/5$

Basta prendere il logaritmo in base ¾ di ambo i membri e , tenendo conto che questa funzione è decrescente (base < 1) , cambiare il segno della disequazione.

(i) $x < \log_2 6$

La disequazione si può riscrivere nella forma $-1 < 2^{x-1} < 3$; la prima condizione è sempre verificata (perché l'esponenziale assume solo valori positivi) , la seconda equivale a $2^x < 6$.

(l) $1 - 1/\log 5 \leq x \leq 1 + 1/\log 5$, $x \neq 1$

(m) $x > -\log_2 [4 (\sqrt{5} - 1)]$

Riscriviamo la disequazione nella forma $\dfrac{1}{4 \cdot 2^{2x}} + \dfrac{2}{2^x} < 16$; ponendo $1 / 2^x = t$, si ottiene $t^2 / 4 + 2t < 16$, che fornisce $4 (-1 - \sqrt{5}) < t < 4 (-1 + \sqrt{5})$. Ritornando alla variabile x : $4 (-1 - \sqrt{5}) < 1 / 2^x < 4 (-1 + \sqrt{5})$; la prima disequazione è sempre verificata , la seconda fornisce $x > \log_{1/2} [4 (\sqrt{5} - 1)] = -\log_2 [4 (\sqrt{5} - 1)]$.

(n) $x \le \log 4 = 2 \log 2$ oppure $x \ge \log 6 = \log 2 + \log 3$

(o) $-1 \le x \le \dfrac{\log^2 3 + \log 3 \sqrt{\log^2 3 + 4 \log 5}}{2 \log 5}$

Il C.E. è dato dalle $x \ge -1$. Prendendo il logaritmo naturale di ambo i membri, la disequazione diventa $\sqrt{x + 1} \log 3 \ge x \log 5$. Per $-1 \le x < 0$, la disequazione è verificata ; per $x \ge 0$ si eleva al quadrato …

(p) $x = 0$

Ponendo $t = 4^x$, si ottiene $t^2 - 2t + 1 \le 0$, che è soddisfatta solo per t = 1, cioè per x = 0 .

5.1

(a) π	(b) $\pi / 3$	(c) $7\pi / 4$	(d) $\pi / 12$
(e) $\pi / 12$	(f) $17\pi / 24$	(g) $19\pi / 24$	
(h) 330^0	(i) 270^0	(l) 135^0	(m) 15^0
(n) 300^0	(o) 7^0 30’	(p) 324^0	

5.2

(a)	- sen x	cos x	- tg x
(b)	- sen x	- cos x	tg x
(c)	- cos x	sen x	- 1 / tg x
(d)	cos x	- sen x	- 1 / tg x
(e)	cos x	sen x	1 / tg x
(f)	2 sen x cos x	$\cos^2 x - \text{sen}^2 x$ $1 - 2\,\text{sen}^2 x$ $2\cos^2 x - 1$	$2\,\text{sen}\,x \cos x / \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ $2\,\text{tg}\,x / (1 - \text{tg}^2 x)$

5.3

(a) E' lo stesso di cos x , cioè $T = 2\pi$

(b) E' lo stesso di sen 3 x ; l'uguaglianza sen 3 (x + T) = sen x deve essere identicamente soddisfatta e questo accade se $3x + 3T = 3x + 2k\pi$ con k intero , cioè se $T = 2k\pi / 3$. Il più piccolo valore positivo che verifica questa condizione è $2\pi/3$, che è dunque il periodo della funzione .

(c) Procedendo come sopra, deve essere $\pi(x + T)/4 = \pi x/4 + 2k\pi$, da cui segue $T = 8k$. Il periodo è dunque 8 .

(d) $\pi/3$

(e) La funzione data è somma di due funzioni , una di periodo 2π e l'altra di periodo $2\pi/3$; il periodo risultante è il più piccolo numero positivo che sia multiplo intero di entrambi i periodi ; questo valore è 2π .

(f) Procedendo come sopra , cerchiamo il più piccolo numero positivo che sia multiplo intero di 2π e di 2 . Poiché 2π è irrazionale , mentre 2 è razionale , non c'è nessun numero che risponde alle richieste fatte e dunque la funzione non è periodica.

(g) $2\pi/3$

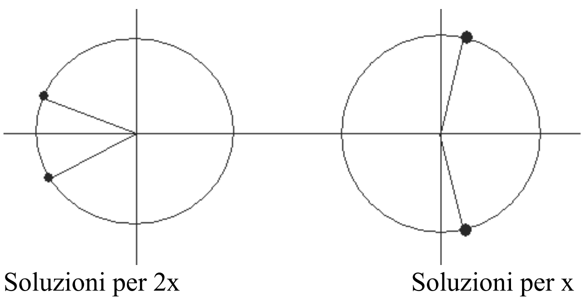
(h) 4π .

5.4

(a) $\left\{ \frac{\pi}{6} , \frac{5\pi}{6} \right\} + 2k\pi$

(b) $\left\{ \pm \frac{5\pi}{12} \right\} + k\pi$

Infatti deve essere $2x = \pm \pi/6 + 2k\pi$, da cui segue il risultato



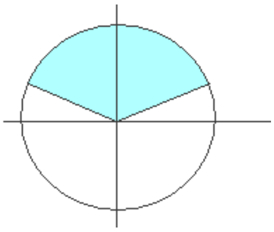
(c) $\left\{ \frac{\pi}{4} \right\} + k\frac{\pi}{2}$

(d) $\left\{ \frac{\pi}{2} , \pi \right\} + 2k\pi$

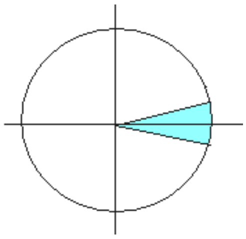
(e) $\left\{ \dfrac{\pi}{18} \right\} + k \dfrac{\pi}{3}$

(f) nessuna soluzione

(g) $\left(\dfrac{\pi}{6} , \dfrac{5 \pi}{6} \right) + 2 k \pi$



(h) $\left(-\dfrac{\pi}{12} , \dfrac{\pi}{12} \right) + k \pi$



(i) $\left[-\dfrac{\pi}{4} , \dfrac{\pi}{4} \right] + k \pi$

(j) $\left[\dfrac{\pi}{4} , \dfrac{\pi}{2} \right] \text{ o } \left[\pi , \dfrac{5\pi}{4} \right] + 2 k \pi$

(k) $\left\{ 0 , \dfrac{\pi}{6} , \dfrac{5 \pi}{6} , \pi \right\} + 2 k \pi$

Sostituendo cos 2 x con $1 - 2 \text{ sen}^2 x$, l'equazione diventa $2 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x = 0$ e quindi sen x = 0 oppure sen x = 1 / 2 .

(l) $\left[\dfrac{\pi}{3} , \pi \right) + 2 k \pi$

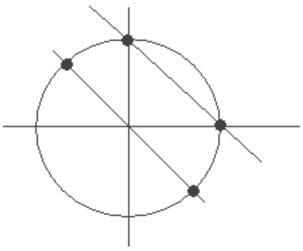
Il C.E. della disequazione è $x \neq \pi + 2 k \pi$.
Ponendo t = tg (x / 2) (e dunque $\text{sen } x = 2 t / (1 + t^2)$, $\cos x = (1 - t^2) / (1 + t^2)$) , la disequazione diventa $3 t \geq \sqrt{3}$; si ottiene dunque $\pi / 6 + k \pi \leq x/2 < \pi / 2 + k \pi$, da cui il risultato.

(m) $\left\{ 0 , \dfrac{\pi}{2} , \dfrac{3 \pi}{4} , \dfrac{7 \pi}{4} \right\} + 2 k \pi$

Se nel secondo membro si sostituiscono i termini sen 2 x ed 1 rispettivamente con 2 senx cosx e con 1 , questo diventa $(\text{sen } x + \cos x)^2$ e dunque l'equazione si riscrive nella forma $(\text{sen } x + \cos x) = (\text{sen } x + \cos x)^2$, da cui segue che deve essere sen x + cos x = 0 oppure sen x + cos x = 1 .
Di queste due equazioni di tipo lineare si può dare un'interpretazione geometrica nel piano X , Y , essendo X = cos x , Y = sen x .

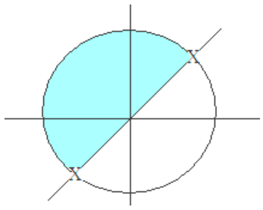
sen x + cos x = 0
Y + X = 0

sen x + cos x = 1
Y + X = 1



(n) $\left(\dfrac{\pi}{4}\ ,\ \dfrac{5\,\pi}{4}\right) + 2\,k\,\pi$

La disequazione lineare ha un'interpretazione geometrica nel piano X , Y definito nell'esercizio precedente :
Y > X



(o) nessuna soluzione

I valori della x tali che cos x = 0 non sono soluzioni dell'equazione , come si trova per sostituzione diretta. Possiamo dunque dividere ambo i membri per $\cos^2 x$, ottenendo $3\ \mathrm{tg}^2\, x - 3\ \mathrm{tg}\, x + 2 = 0$. Questa è un'equazione di secondo grado in tg x con $\Delta < 0$ e dunque non ha nessuna soluzione.

(p) $\left(0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right) + k\,\pi$

C.E.: $x \neq \pi / 2 + k\,\pi$

Possiamo riscrivere $\dfrac{\cos^2 x + \mathrm{sen}\, x - 1}{\cos x} > 0$ ovvero $\dfrac{\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}^2 x}{\cos x} > 0$. Rimane da studiare separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore e prendere gli intervalli in cui sono concordi.

(q) $\left(\dfrac{\pi}{6}\ ,\ \dfrac{5\,\pi}{6}\right) + 2\,k\,\pi$

La disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} \mathrm{sen}\ x \geq 0 \\ 1 - \mathrm{sen}\ x < 2\ \mathrm{sen}^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{sen}\ x \geq 0 \\ 2\ \mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\ x - 1 > 0 \end{cases}$$

che fornisce sen x > 1 / 2 .

(r) $\left\{0\ ,\ \dfrac{\pi}{6}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right\} + k\,\pi$

Basta riscrivere l'equazione nella forma sen x cos x (cos x - $\sqrt{3}$ sen x) = 0 , trovare le soluzioni delle equazioni sen x = 0 , cos x = 0 , tg x = $\sqrt{3}$ / 3 .

(s) $\left\{\dfrac{\pi}{6} + k\,\pi\right\} \cup \left\{\dfrac{3\,\pi}{4} + k\,\pi\right\}$

Sostituendo il secondo membro con $3\ \mathrm{sen}^2 x + 3\cos^2 x$, l'equazione diventa

$$\sqrt{3}\ \mathrm{sen}^2x\ -\ \cos^2x + (\ \sqrt{3} - 1\ )\ \mathrm{sen}\ x \cos x = 0$$

Possiamo dividere per $\cos^2 x$, perché i valori che annullano cos x non sono soluzioni dell'equazione ; in questo modo si ottiene

$$\sqrt{3}\ \mathrm{tg}^2x\ + (\ \sqrt{3} - 1\ )\ \mathrm{tg}\ x - 1 = 0$$

che fornisce

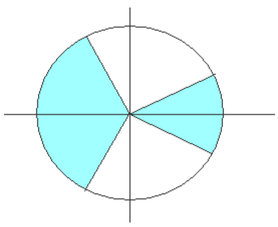
$$\mathrm{tg}\ x = \frac{1 - \sqrt{3}\ \pm\ \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}\ \pm\ \sqrt{(\ 1 + \sqrt{3}\ )^2}}{2\sqrt{3}} =$$
$$= 1 / \sqrt{3}\ \text{ oppure} - 1\ \ldots..$$

(t) $\left[\ 0\,,\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\ \frac{2\,\pi}{3},\frac{4\,\pi}{3}\right] \cup \left[\ \frac{11\,\pi}{6},2\,\pi\right]\ + 2\,k\,\pi$

L'espressione trigonometrica si annulla se

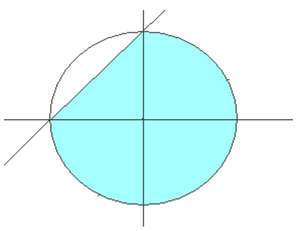
$$\cos x = \frac{\sqrt{3} - 1\ \pm\ \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1\ \pm\ \sqrt{(\ 1 + \sqrt{3}\ )^2}}{4} =$$
$$= \sqrt{3} / 2\ \text{ oppure} - 1/ 2\ .$$

La disequazione è dunque verificata se $\cos x \geq \sqrt{3} / 2$ oppure $\cos x \leq -1 / 2$ …..



(u) $\left[\ 0\,,\frac{\pi}{2}\ \right] \cup [\ \pi\,,2\pi\ ] + 2\,k\,\pi$

Nel piano X , Y la disequazione diventa $X - Y + 1 \geq 0$:



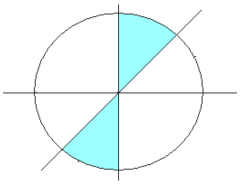
(v) $\left[\ \frac{\pi}{6}\ ,\frac{7\,\pi}{6}\right]\ + 2\,k\,\pi$

(w) $\left(\ \frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)\ +\ k\,\pi$

La disequazione si può riscrivere nella forma

$$\frac{\text{sen } x \cos x}{\text{sen}^2 x} > \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\cos x\,(\text{sen } x - \cos x)}{\text{sen}^2 x} > 0$$

con la condizione sen $x \neq 0$, cioè $x \neq k\pi$. Occorre studiare separatamente il segno di cos x e quello di sen x – cos x e poi prendere gli intervalli in cui il segno è concorde. Il segno di cos x è immediato , quello di sen x – cos x si ottiene facilmente utilizzando la rappresentazione geometrica nel piano X , Y .



(x) $\left[-\frac{\pi}{6} , \frac{\pi}{6} \right] + k\pi$, $x \neq \pi + 2k\pi$

La disequazione è definita per $x \neq \pi + 2k\pi$.
Poiché tg (x / 2) = $\pm\sqrt{(1 - \cos x)/(1 + \cos x)}$, possiamo riscrivere :

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \geq 7 - 8\cos x .$$

Poiché $1 + \cos x > 0$, moltiplicando ambo i membri per questa quantità , si ottiene

$$8\cos^2 x \geq 6$$

da cui segue che deve essere $\cos x \geq \sqrt{3}/2$ oppure $\cos x \leq -\sqrt{3}/2$ ….

(y) $\left(\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} , \pi\right) + k\pi$

(z) $\left[0 , \frac{\pi}{8}\right) + \left[\frac{\pi}{4} , \frac{5\pi}{8}\right) + k\pi$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore.

La disequazione sen 2x + cos 2x – 1 > 0 si riscrive nel piano X , Y (con X = cos 2x , Y = sen 2x) nella forma Y + X – 1 > 0 , che si visualizza come indicato in fig.1.
Il numeratore è dunque positivo per $2k\pi < 2x < \pi/2 + 2k\pi$, cioè per $k\pi < x < \pi/4 + k\pi$ (fig.2)

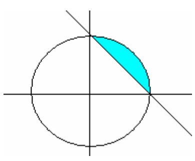


fig.1

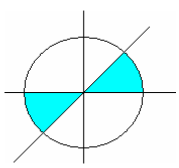


fig.2

La disequazione sen $(2x - \pi / 4) > 0$ è verificata per $2k\pi < 2x - \pi/4 < \pi + 2k\pi$ cioè per $\pi/8 + k\pi < x < 5\pi/8 + k\pi$. (fig. 3)

La disequazione di partenza è dunque verificata per $k\pi \le x < \pi/8 + k\pi$ oppure per $\pi/4 + k\pi \le x < 5\pi/8 + k\pi$ (fig. 4) .

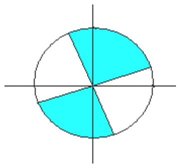


fig. 3

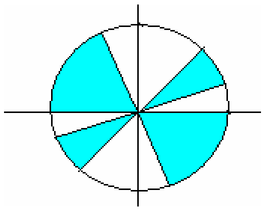


fig. 4

5.5

(a)

$\text{sen}\,\beta = \cos\beta = \sqrt{2}/2$, $\text{tg}\,\beta = 1$

$\text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 2\sqrt{6}/5$, $\text{tg}\,\alpha = -2\sqrt{6}$

$\text{sen}\,\gamma = \text{sen}\,(\pi - \alpha - \beta) = \text{sen}\,(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\alpha\,\cos\beta = (2\sqrt{6} - 1)/5\sqrt{2}$

$\cos\gamma = \cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \cos\alpha\,\cos\beta = (2\sqrt{6} + 1)/5\sqrt{2}$

$\text{tg}\,\gamma = (2\sqrt{6} - 1)/(2\sqrt{6} + 1)$

Nota : poiché α è un angolo interno del triangolo , il suo seno è positivo e dunque il segno corretto davanti alla radice è quello indicato.

(b)

$\text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha / \sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha} = 3/5$, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha} = 4/5$

$\cos\beta = 2\cos^2(\beta/2) - 1 = 7/25$, $\text{sen}\,\beta = 24/25$, $\text{tg}\,\beta = 24/7$

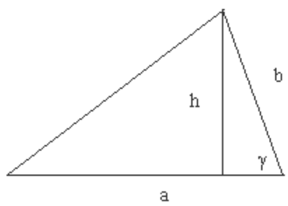
$\text{sen}\,\gamma = \text{sen}\,(\pi - \alpha - \beta) = 117/125$, $\cos\gamma = \cos(\pi - \alpha - \beta) = 44/125$, $\text{tg}\,\gamma = 117/44$

Nota : poiché α è un angolo interno del triangolo , il suo seno è positivo e dunque il segno corretto davanti alla radice è quello indicato ; inoltre poiché seno e tangente hanno segno positivo, anche il coseno lo ha. L'angolo β è acuto , perché $\beta/2 < \pi/4$ dato che $\cos\beta > 1/\sqrt{2}$.

5.6

Se $\gamma = \pi/2$, il risultato è noto.

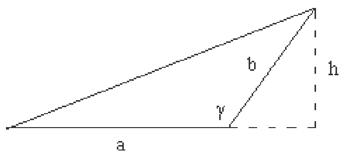
Se $0 < \gamma < \pi/2$:



$h = b\,\text{sen}\,\gamma$

$A = a\,(b\,\text{sen}\,\gamma)/2$

Se $\pi / 2 < \gamma < \pi$:



$h = b \text{ sen } (\pi - \gamma) = b \text{ sen } \gamma$

$A = a\,(b \text{ sen } \gamma) / 2$

6.1

I grafici delle funzioni sono riportati nelle pagine finali.

7.1

(a) $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$

Deve essere $(x^3 - 1) / (x - 2) \geq 0$, $x \neq 2$. Poiché $x^3 - 1 \geq 0 \leftrightarrow x \geq 1$, il risultato diventa immediato.

(b) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

Deve essere $(x + 1) / x > 0$, $x \neq 0$.

(c) $(-e, e) - \{0\}$

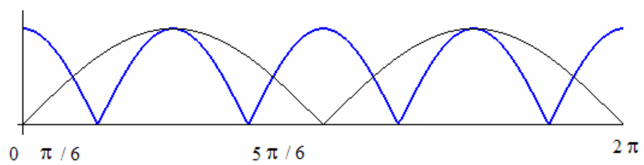
Deve essere $\log |x| \leq 1$, $x \neq 0$

(d) $(-1, 1) - \{0\}$

Devono essere verificate le condizioni $1 - x^2 \geq 0$, $x \neq 0$, $\sqrt{1 - x^2} > \log |x|$. Le prime due richiedono che deve essere $x \in [-1, 1] - \{0\}$. In questo insieme $\log |x|$ è negativo e dunque minore della radice ; occorre però escludere i punti ± 1 che annullano entrambe le funzioni.

(e) $(\pi / 6, \pi /2) \cup (\pi / 2, 5\pi / 6) + k\pi$

Devono essere verificate le condizioni $\text{sen } x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$, $|\text{sen } x| > |\cos 2x|$.
Risolviamo per via geometrica, confrontando i grafici delle funzioni $|\text{sen } x|$, $|\cos 2x|$



(f) R

Deve essere $|x^2 - 4| + x^2 - x > 0 \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \text{ opp. } x \leq -2 \\ 2x^2 - x - 4 > 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} -2 < x < 2 \\ 4 - x > 0 \end{cases}$ ....

(g) $R - \{(1 \pm \sqrt{5}) / 2\}$

Deve essere $x^2 - x - 1 \neq 0$.

7.2

(a) E' definita in **R ;** limitandoci per periodicità ai valori nell'intervallo $[0, 2 \pi]$, è nulla per $x = \pi / 6 , 5 \pi / 6 , 3 \pi / 2$, positiva in $(\pi / 6 , 5 \pi / 6)$.
Infatti la disequazione $\text{sen } x - \cos 2x \geq 0$ si può riscrivere come $2 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 1 \geq 0$ (ponendo $\cos 2x = 1 - 2 \text{ sen}^2 x$) ; questa è verificata se $\text{sen } x \geq 1 / 2$ oppure $\text{sen } x \leq -1$ (ovviamente l'ultima condizione vale solo con il segno di uguaglianza e fornisce alcuni zeri della funzione) .

(b) E' definita in **R** - $\{ -2, 1 \}$; è nulla per $x = 0$, positiva in $(-2, 0) \cup (1, +\infty)$.

(c) E' definita in $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$; è sempre positiva.
La funzione (potenza reale) resta definita a partire dall'espressione $e^{x \log (1 + 1 / x)}$.

(d) E' definita in $[-2, 2] - \{ -1, 0, 1 \}$; è nulla per $x = \pm 2$, positiva in $(-2 , -1) \cup (1 , 2)$.

(e) E' definita in **R** - $\{ 0 \}$; è nulla per $x = \pm e^3$ e per $x = \pm e^{-1}$, positiva in $(-\infty, - e^3) \cup (-e^{-1}, 0) \cup (0, e^{-1}) \cup (e^3, +\infty)$.
Per studiare il segno, si riscrive la funzione nella forma $\log^2 | x | - 2 \log | x | - 3$ e , ponendo $\log | x | = t$, ci si riconduce a studiare la disequazione $t^2 - 2 t - 3 \geq 0$.

(f) E' definita in **R;** limitandoci per periodicità ai valori nell'intervallo $[0, 2 \pi]$, è nulla per $x = 3 \pi / 4, 7 \pi / 4$, positiva in $[0 , 3 \pi / 4) \cup (7 \pi / 4 , 2\pi]$

7.3

(a) $(f \circ g) (x) = \log (1 / x^2) = - 2 \log |x|, \ x \neq 0$
$(g \circ f) (x) = 1 / \log^2 x , \ x > 0 \ \ x \neq 1$

(b) $(f \circ g) (x) = \text{sen} (1 / x) , x \neq 0$
$(g \circ f) (x) = 1 / \text{sen} x , \ x \neq k \pi$

(c) $(f \circ g) (x) = x , \ x \in \mathbf{R}$
$(g \circ f) (x) = x , \ x > 0$

(d) $(f \circ g) (x) = x , x > 0$
$(g \circ f) (x) = | x |, \ x \in \mathbf{R}$

(e) $(f \circ g) (x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$(g \circ f) (x) = \begin{cases} (x+ 1)^2 & \text{se } x > 0 \\ 4 (1 - x)^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Infatti :

x	$\xrightarrow{g}$ x^2	$\xrightarrow{f}$	x	$\xrightarrow{f}$	$\xrightarrow{g}$
$\neq 0$	> 0	$x^2 + 1$	> 0	$x + 1$	$(x + 1)^2$
$= 0$	$= 0$	2	≤ 0	$2 - 2 x$	$4 (1 - x)^2$

7.4

(a) $f(x) = e^x$, $g(x) = 1/x$, $h(x) = \log x$

(b) $f(x) = x^2$, $g(x) = \log x$, $h(x) = x^2$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1 + x$, $h(x) = \operatorname{sen} x$

7.5

(a) non è iniettiva .

Verifichiamo il risultato utilizzando la definizione .
L'iniettività significa che deve essere $x + 1/x = y + 1/y \rightarrow x = y$.
Riscriviamo il primo membro :
$x + 1/x = y + 1/y \rightarrow x^2 y + y = x y^2 + x \rightarrow x y (x - y) = x - y \rightarrow (x y - 1)(x - y) = 0.$
Questo prodotto può essere nullo anche se $x \neq y$ (basta che sia $y = 1/x$, cioè un numero sia l'inverso dell'altro) ; dunque la funzione non è iniettiva.

Una risoluzione alternativa consiste nello studiare l'equazione $x + 1/x = k$ al variare del parametro k : se per almeno un valore di k l'equazione ammette più di una soluzione , la funzione non è iniettiva ; se invece per ogni valore di k l'equazione ammette al più una soluzione (cioè non ammette soluzioni oppure ne ammette una sola) allora la funzione è iniettiva. Questo metodo permette di stabilire anche qual è l'immagine della funzione (è l'insieme dei valori di k in corrispondenza dei quali l'equazione ammette almeno una soluzione) . Riscritta l'equazione nella forma $x^2 - k x + 1 = 0$, troviamo che ammette le soluzioni $x = (k \pm \sqrt{k^2 - 4}) / 2$ purché sia $k \geq 2$ oppure $k \leq -2$. Questo prova che la funzione non è iniettiva (l'equazione ha due soluzioni distinte) e anche che la sua immagine è data dall'insieme $(-\infty , -2] \cup [2 , +\infty)$.

(b) è iniettiva .

Riprendiamo le considerazioni svolte per l'esercizio precedente , tenendo però presente che adesso è cambiato il dominio di definizione della funzione.
Nella verifica a partire dalla definizione , adesso il prodotto $(x y - 1)(x - y)$ si annulla solo per $x = y$, dato che nel nuovo dominio non esistono numeri distinti che siano uno l'inverso dell'altro. Questo prova l'iniettività della funzione.

Nella seconda verifica osserviamo che adesso la soluzione $(k + \sqrt{k^2 - 4}) / 2$ è accettabile (cioè sta nel dominio della funzione , ovvero è positiva) solo per $k \geq 2$, mentre la soluzione $(k - \sqrt{k^2 - 4}) / 2$ non è accettabile per nessun valore di k . Poiché al variare del parametro k l'equazione ha al più una soluzione , la funzione data è iniettiva ; inoltre la sua immagine è data dall'insieme $[2 , +\infty)$. La sua funzione inversa è $f^{-1}(k) = (k + \sqrt{k^2 - 4}) / 2$.

(c) non è iniettiva

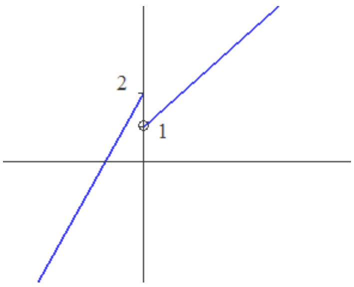
Le funzioni periodiche , come quella considerata , non sono mai iniettive nel loro campo di esistenza , dato che i loro valori si ripetono ad intervalli costanti .

(d) iniettiva

Per ogni valore del parametro k l'equazione $x^3 - 2 = k$ ammette come unica soluzione il valore $x = \sqrt[3]{k+2}$. Dunque la funzione è iniettiva , la sua immagine è tutto **R** , la sua inversa è la funzione $f^{-1}(k) = \sqrt[3]{k+2}$.
L'iniettività poteva essere stabilita anche osservando che la funzione è crescente (cioè all'aumentare del valore della variabile x la funzione aumenta il suo valore) oppure tracciando il grafico.

(e) non è iniettiva

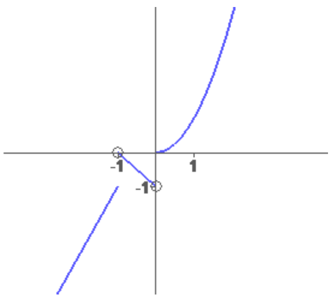
Separatamente le due leggi sono iniettive , ma la funzione nel suo complesso non lo è . Infatti esistono $x > 0$, $y \leq 0$ tali che $x + 1 = 2 + 2y$; basta ad esempio prendere $x = 1$, $y = 0$. Che la funzione non è iniettiva , si può dedurre facilmente anche per via grafica .



La figura a fianco mostra il grafico della funzione : è facile vedere che le rette orizzontali $y = k$ con $1 < k \leq 2$ lo intersecano in due punti ; questo prova la mancanza di infettività.

(f) è iniettiva

Il metodo più semplice per provare l'iniettività è quello grafico.



7.6

(a) $f^{-1}(x) = e^{x/2}$, $x \in \mathbf{R}$

L'equazione $\log x^2 = k$ ha come soluzioni $x = \pm e^{k/2}$ per ogni valore di k ; di queste due è accettabile solo quella positiva. Dunque l'immagine della funzione è **R** ; questo insieme diventa il dominio della funzione inversa , data da $f^{-1}(k) = e^{k/2}$

(b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \geq 0$

L'equazione $\sqrt{x^2 - 1} = k$ ha come soluzioni $x = \pm\sqrt{k^2 + 1}$ se $k \geq 0$; di queste due è accettabile solo quella positiva . L'immagine della funzione è $[0, +\infty)$; questo insieme diventa il dominio della funzione inversa $f^{-1}(k) = \sqrt{k^2 + 1}$.

(c) $f^{-1}(x) = -\sqrt{4 - x^{1/3}}$, $x \leq 64$

L'equazione $(4 - x^2)^3 = k$ ha come soluzioni $x = \pm\sqrt{4 - k^{1/3}}$ se $k \leq 64$; di queste due è accettabile solo quella negativa ….

(d) $f^{-1}(x) = \sqrt{1 + (1/x)}$, $x > 0$

L'equazione $1 / (x^2 - 1) = k$ si può riscrivere come $k\,x^2 = 1 + k$. Per $k = 0$ l'equazione è impossibile ; per $k \neq 0$ ammette le soluzioni $x = \pm\sqrt{1 + (1/k)}$ purché sia $k \leq -1$ oppure $k > 0$. Di queste due soluzioni , quella negativa non è accettabile, quella positiva lo è se $k > 0$. Dunque la funzione è iniettiva ed ha per immagine $(0, +\infty)$.

(e) $f^{-1}(x) = (1 + \log x) / (1 - \log x)$, $x > 0$ $x \neq e$

L'equazione $f(x) = k$ si riscrive come $(x - 1) / (x + 1) = \log k$ purché $k > 0$. Da questa si deduce $x = (1 + \log k) / (1 - \log k)$ purché $k \neq e$. La soluzione è accettabile. La funzione è invertibile e l'inversa è data da $f^{-1}(k) = (1 + \log k) / (1 - \log k)$, definita per $k \in (0, e) \cup (e, +\infty)$.

(f) $f^{-1}(x) = (x^2 + 1) / (2x)$, $x \geq 1$

L'equazione $f(x) = k$ si riscrive come $\sqrt{x^2 - 1} = k - x$; elevando al quadrato , si ottiene $x = (k^2 + 1) / (2k)$ sotto la condizione che sia $x \leq k$. La soluzione è accettabile se risulta $(k^2 + 1) / (2k) \geq 1$, $(k^2 + 1) / (2k) \leq k$, cioè se $k \geq 1$.

7.7

L'insieme è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1 situata nel semipiano delle ordinate positive o nulle. La curva ha equazione $y = \sqrt{1 - x^2}$ ed è grafico della funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

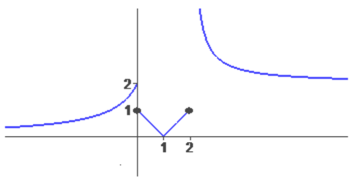
7.8

Dominio : $R - \{2\}$
Immagine : $(-1, +\infty)$
Iniettività : non è iniettiva
Equazione : per $k \leq -1$ nessuna soluzione , per $-1 < k \leq 0$ una soluzione , per $0 < k < 1$ due soluzioni , per $k \geq 1$ una soluzione .

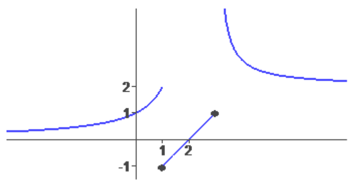
Una funzione che ha un grafico con le proprietà analoghe a quello assegnato può essere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1-x} & \text{se } x \le 0 \\ x - 1 & \text{se } 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{x-2} + 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

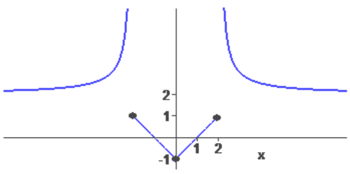
$|f(x)|$



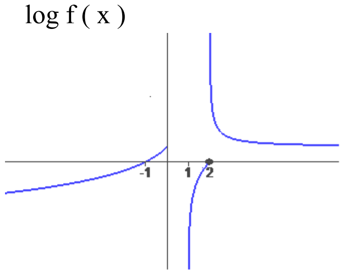
$f(x-1)$



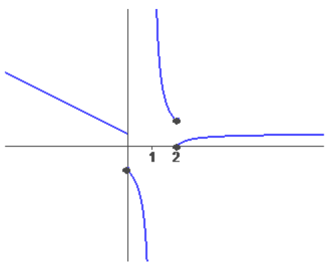
$f(|x|)$



$\log f(x)$



$1/f(x)$



8.1

(a) quoziente $x^2 - 1$, resto $x - 2$

(b) quoziente $x^3 - 2x^2 + 1$, resto 0

8.2

(a) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$

(b) $(x-1)(x^2+x+1)$

(c) $(x-1)(x-2)(x+3)$

E’ utile ricordare il seguente risultato :
se un polinomio a coefficienti interi $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ammette una radice razionale $x = p / q$ (p e q primi tra loro) , allora p è un divisore di a_0 , mentre q lo è di a_n .
Nel caso in esame $a_n = a_3 = 1$, $a_0 = 6$. Dunque se esistono radici razionali del polinomio, queste devono essere ricercate tra i numeri ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6 . Una verifica diretta prova che 1 , 2 e -3 sono le radici cercate (non ce ne possono essere altre perché il grado del polinomio è 3) .

(d) $(x - 1) (x - 2) (x^2 + 1)$

Procedendo come sopra , si trovano le radici 1 e 2 .
Dividendo il polinomio per $(x – 1) (x – 2)$ si trova il quoziente $(x^2 + 1)$ (e naturalmente resto 0) che è un polinomio di secondo grado con $\Delta < 0$, dunque non ulteriormente scomponibile.

9.1

Si ricordi che l’equazione della retta passante per due punti distinti P e Q non allineati sulla verticale è $(y – y_Q) / (y_P – y_Q) = (x – x_Q) / (x_P – x_Q)$.
Retta per A , B : $y = -2 x + 4$; retta per B , C : $y = - x / 6 + 4$; retta per A , C : $y = - 5x/8 + 5/4$.
La retta di equazione $y = a x + b$ divide il piano in due semipiani , caratterizzati dalle disequazioni $y \le a x + b$ e $y \ge a x + b$.
Il triangolo è l’intersezione di tre semipiani individuati dalle rette passanti per i lati ; nel caso in esame , è caratterizzato dall'insieme delle disequazioni: $y \le - 2 x + 4$, $y \le - x / 6 + 4$, $y \ge - 5 x / 8 + 5 / 4$.

9.2

(a) Una generica retta non verticale passante per P ha equazione $y – 1 = m (x – 2)$; il coefficiente angolare deve essere uguale a quello della retta r’ , cioè $m = - 4$. La retta ha dunque equazione $y = - 4 x + 9$
(b) Una generica retta non verticale passante per P ha equazione $y – 1 = m (x – 2)$; il coefficiente angolare deve essere l’inverso cambiato di segno di quello della retta r” , cioè $m = - 2 / 3$. La retta ha dunque equazione $y = -2 x / 3 + 7 / 3$
(c) E’ la soluzione del sistema formato dalle equazioni delle due rette : $P = (14 / 11 , 32 / 11)$
(d) La distanza di un punto $P = (x_0 , y_0)$ dalla retta di equazione $a x + b y + c = 0$ è data da $d = | a x_0 + b y_0 + c | / \sqrt{a^2 + b^2}$. Nel nostro caso $d = 1/ \sqrt{17}$

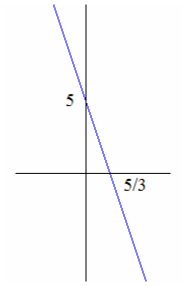
9.3

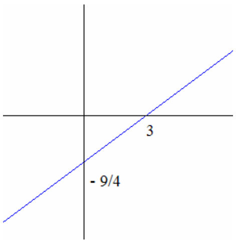
(a) circonferenza di centro (1, 0) e raggio 1
(b) iperbole di vertici (± 1, 0) e asintoti $y = \pm x /\sqrt{2}$
(c) ellisse di centro (0, 0) e semiassi 1, $1/\sqrt{2}$
(d) due rette per l'origine, di equazioni $y = \pm x /\sqrt{2}$
(e) insieme vuoto
(f) parabola ad asse verticale con vertice in (0, 0) e concavità verso il basso
(g) parabola ad asse verticale con vertice in (1, -1) e concavità verso l'alto
(h) il punto (0, 0).

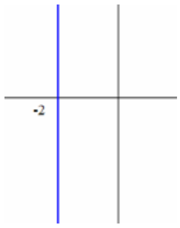
9.4

La distanza d tra due punti $P = (x_P , y_P)$ e $Q = (x_Q , y_Q)$ del piano è data dall'espressione $\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$. Nel nostro caso $d = \sqrt{10}$.

9.5







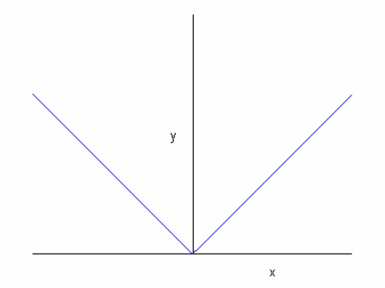
9.6

$(x + 1)^2 + (y – 2)^2 = 1$ ovvero $x^2 + y^2 + 2 x – 4 y + 4 = 0$

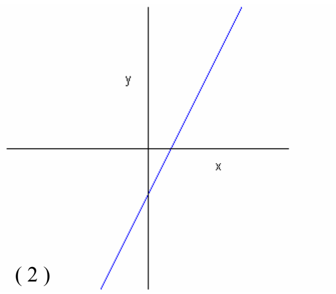
9.7

L'equazione si può scrivere nella forma $(x – 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ e si riferisce alla circonferenza di centro (3 , -1) e raggio 2.

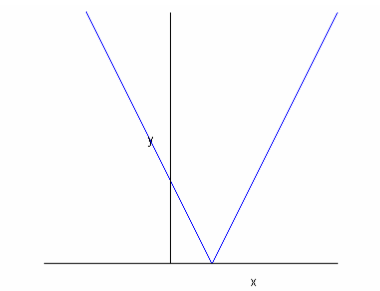
6.1



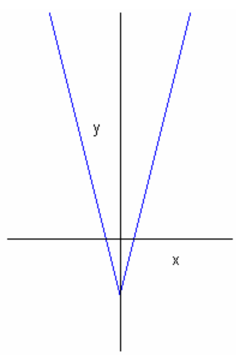
(1)



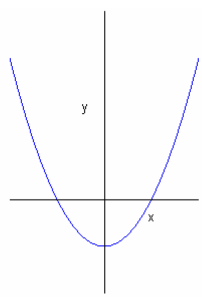
(2)



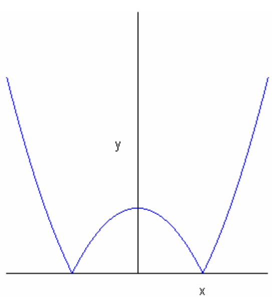
(3)



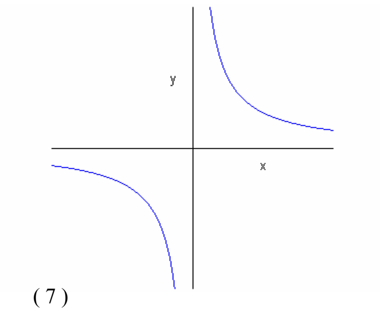
(4)



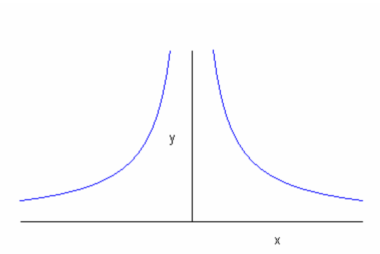
(5)



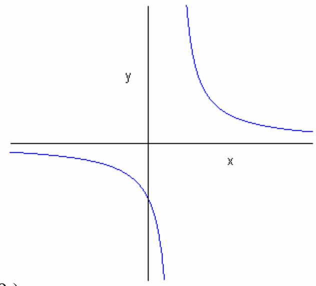
(6)



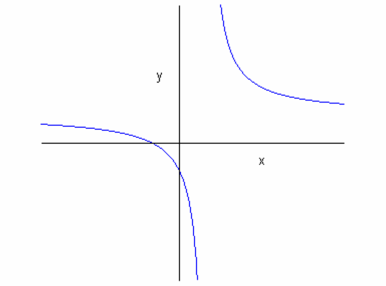
(7)



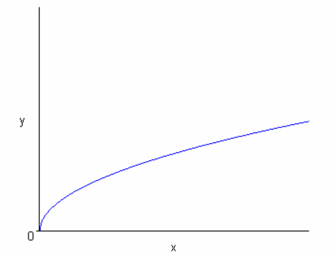
(8)



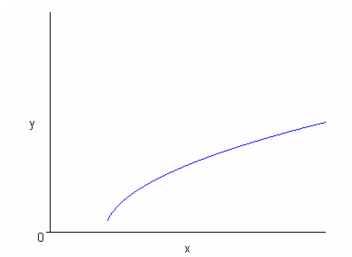
(9)



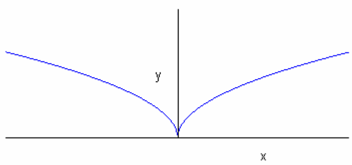
(10)



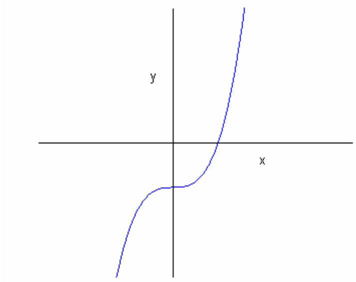
(11)



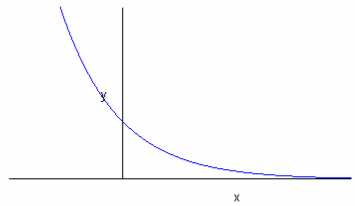
(12)



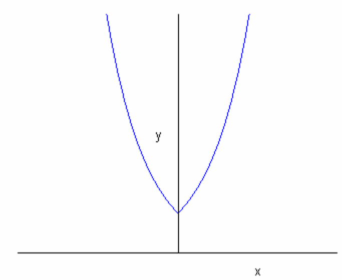
(13)



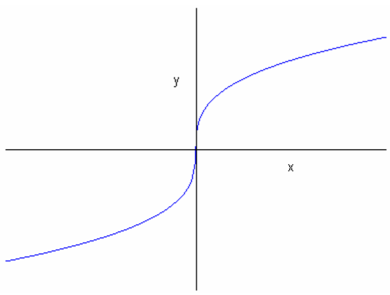
(14)



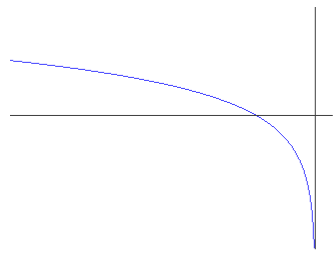
(15)



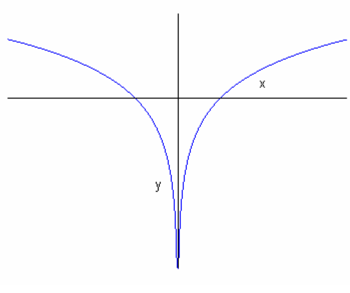
(16)



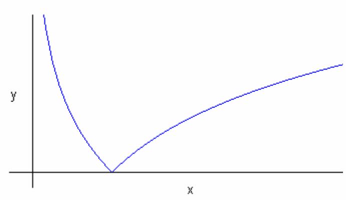
(17)



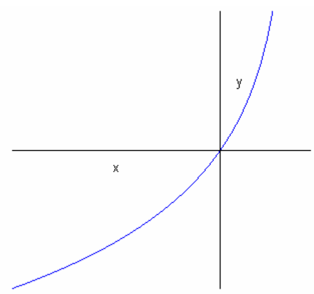
(18)



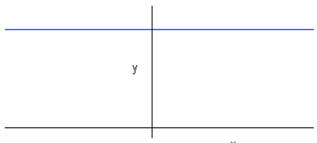
(19)



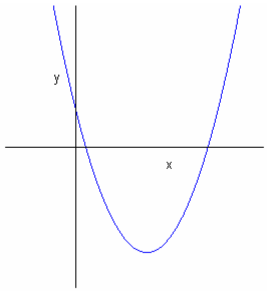
(20)



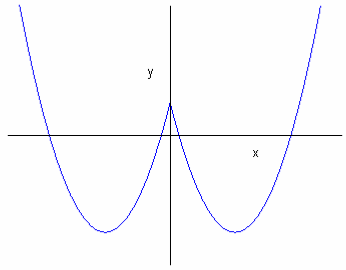
(21)



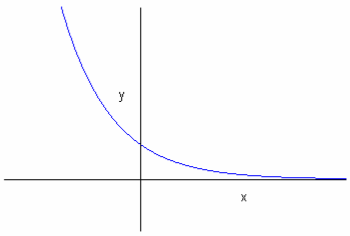
(22)



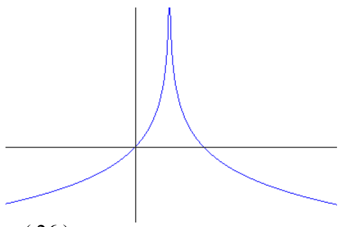
(23)



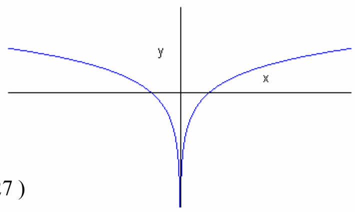
(24)



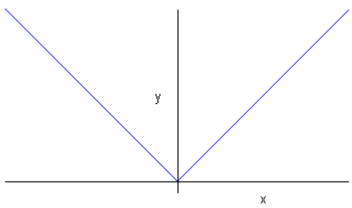
(25)



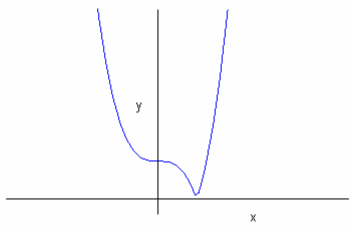
(26)



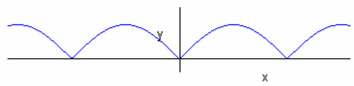
(27)



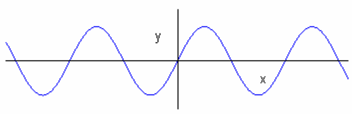
(28)



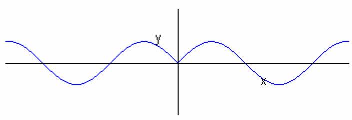
(29)



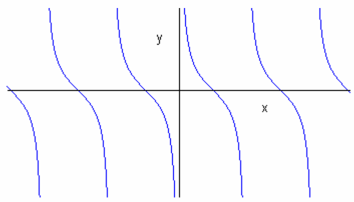
(30)



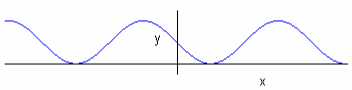
(31)



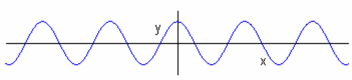
(32)



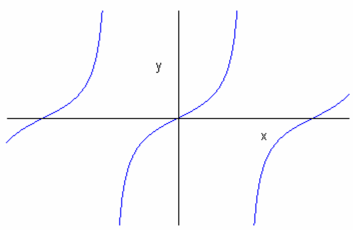
(33)



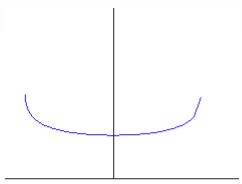
(34)



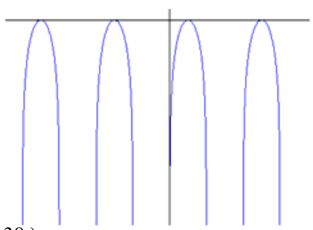
(35)



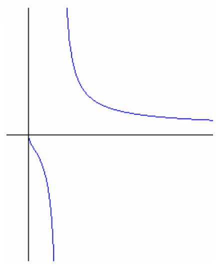
(36)



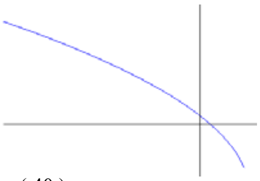
(37)



(38)

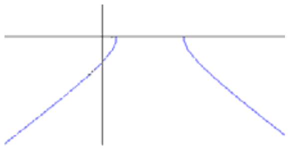


(39)

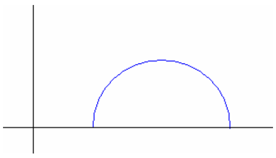


(40)

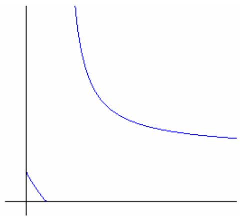
(41)



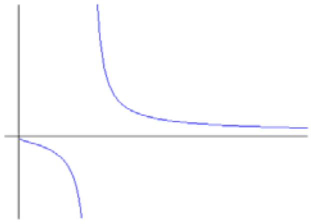
(42)



(43)



(44)



(45)