Parte seconda – Soluzioni

[A]

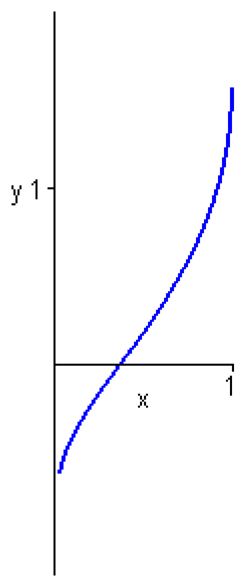
1.

- C.E. $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \log x \neq 0 \\ \left| \dfrac{1+\log x}{1-\log x} \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e \\ 1 + 2\log x + \log^2 x \leq 1 - 2\log x + \log^2 x \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1]$
- zeri : la funzione si annulla per x = 1/e
- $\operatorname{arcsen} \dfrac{1+\log x}{1-\log x} = k \Leftrightarrow \dfrac{1+\log x}{1-\log x} = \operatorname{sen} k \quad \text{se } k \in [-\pi/2, \pi/2]$

  $\Leftrightarrow \log x = \dfrac{\operatorname{sen} k - 1}{\operatorname{sen} k + 1} \quad \text{se } k \in (-\pi/2, \pi/2]$

  $\Leftrightarrow x = \exp\left(\dfrac{\operatorname{sen} k - 1}{\operatorname{sen} k + 1}\right)$

  Si verifica facilmente che la soluzione trovata sta nell'intervallo (0 , 1].
  Dunque la funzione è invertibile e la sua immagine è $(-\pi/2, \pi/2]$.
- Una funzione continua in un intervallo e iniettiva è monotòna.
- Grafico



per x -> 0 $\quad f(x) \to -\pi/2$

$f(1) = \pi/2$

2.

- Successione ben definita e positiva
- Proviamo per induzione che è $x_n \leq n / (n+1)$.

Passo base: per n = 1 la maggiorazione diventa $0 \le 1$, che è banalmente vera

Induttività : dobbiamo provare che $x_n \le n / (n + 1) \Rightarrow x_{n+1} \le (n + 1) / (n + 2)$.

$$x_{n+1} = \frac{n}{1+2n}(1+x_n) \le_{(*)} \frac{n}{1+2n}\left(1+\frac{n}{n+1}\right) \le_{(?)} \frac{n+1}{n+2}$$

In (*) abbiamo usato l'ipotesi.

Con semplici calcoli algebrici si trova che la seconda disequazione è sempre verificata.

- $$x_{n+1} \ge x_n \Leftrightarrow \frac{n}{2n+1}(1+x_n) \ge x_n \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_n \le \frac{n}{n+1}$$

Per quanto verificato al passo precedente l'ultima condizione è sempre verificata; questo prova che la successione è crescente e dunque ammette limite, necessariamente finito perché $0 < x_n \le n / (n + 1) \to 1$. I punti fissi della successione verificano l'equazione $L = (1 + L) / 2$; dunque il limite vale 1.

3.

$$x + \mathrm{sen}^2 x = x + o(x)$$

$$\exp(x + \mathrm{sen}^2 x) = \exp(x + o(x) = 1 + x + o(x)$$

$$\sqrt{x + \mathrm{sen}x} = \sqrt{2x + o(x)}$$

$$\cos\sqrt{x + \mathrm{sen}x} = \cos\sqrt{2x + o(x)} = 1 - x + o(x)$$

$\log \mathrm{tg}\, 2x - \log \mathrm{sen}\, x = \log (2 x + o (x)) - \log (x + o (x)) = \log 2 + o (x)$

$$f(x) \approx \frac{2x}{x \log 2} \to \frac{2}{\log 2}$$

4.

$$-\varepsilon < \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\varepsilon} < \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} < e^{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2\varepsilon} < \frac{1+x}{1-x} < e^{2\varepsilon} \quad \Leftrightarrow_{(*)}$$

$$(1-x)e^{-2\varepsilon} < 1+x < (1-x)e^{2\varepsilon} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{-2\varepsilon}-1}{e^{-2\varepsilon}+1} < x < \frac{e^{2\varepsilon}-1}{e^{2\varepsilon}+1}$$

Si vede facilmente che quello trovato è un intorno di 0 .

(*) abbiamo supposto $1 - x > 0$, cioè $x < 1$, il che non è restrittivo per la verifica.

[B]

1.

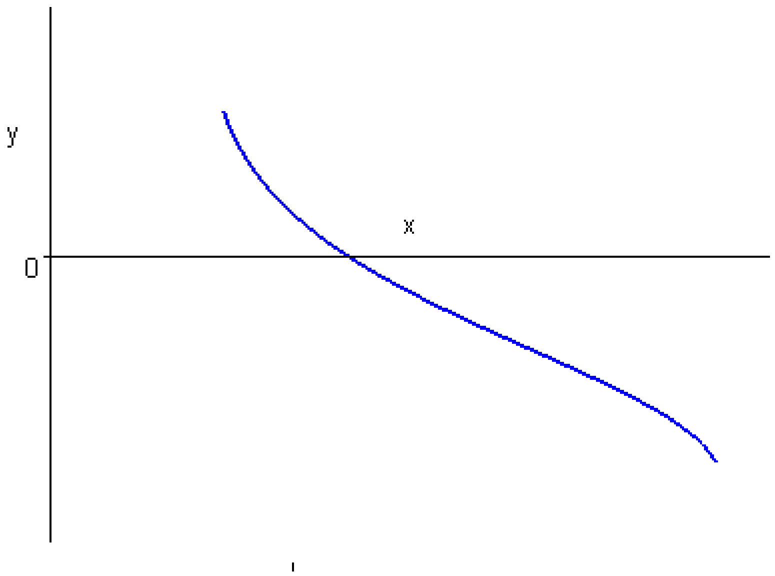
- C.E. $\begin{cases} x-1>0 \\ -1\le 1-\log(x-1)\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 0\le \log(x-1)\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ 1\le x-1\le e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \; x\in[\,2\,,1+e^2\,]$
- zeri : la funzione si annulla per x = 1+e
- $4\,\text{arcsen}\,(1-\log(x-1)) \;=\; k \;\Leftrightarrow\; 1-\log(x-1) \;=\text{sen}\,(k/4)$

  se $k/4 \in [\,-\pi/2\,,\pi/2\,]$ cioè $k \in [\,-2\pi\,,2\pi\,]$

  $\Leftrightarrow\; \log(x-1) = 1-\text{sen}\,(k/4) \;\Leftrightarrow\; x \;=\; 1+\exp(1-\text{sen}\,(k/4))$

  Si verifica facilmente che la soluzione trovata sta nell'intervallo $[\,2\,,\,1+e^2\,]$

  Dunque la funzione è invertibile e la sua immagine è $[\,-2\pi\,,2\pi\,]$.
- Una funzione continua in un intervallo e iniettiva è monotòna.
- Grafico



$f(2) = 2\pi\;,\; f(1+e^2) = -2\pi$

2.

- Successione ben definita e positiva
- Proviamo per induzione che è $x_n \le (n+1)/(n+2)$.

  Passo base: per n = 1 la maggiorazione diventa $1/2 \le 2/3$, che è banalmente vera

  Induttività : dobbiamo provare che $x_n \le (n+1)/(n+2) \Rightarrow x_{n+1} \le (n+2)/(n+3)$.

  $$x_{n+1} = \frac{n+1}{3+2n}(1+x_n) \le_{(*)} \frac{n+1}{3+2n}\left(1+\frac{n+1}{n+2}\right) \le_{(?)} \frac{n+2}{n+3}$$

  In (*) abbiamo usato l'ipotesi.

  Con semplici calcoli algebrici si trova che la seconda disequazione è sempre verificata.
- $x_{n+1} \ge x_n \;\Leftrightarrow\; \dfrac{n+1}{2n+3}(1+x_n) \ge x_n \;\Leftrightarrow\; \ldots. \;\Leftrightarrow\; x_n \le \dfrac{n+1}{n+2}$

  Per quanto verificato al passo precedente l'ultima condizione è sempre verificata; questo prova che la successione è crescente e dunque ammette limite, necessariamente finito perché $0 < x_n \le$

$(n + 1) / (n + 2) \to 1$. I punti fissi della successione verificano l'equazione $L = (1 + L) / 2$; dunque il limite vale 1.

3.

$$\exp(\operatorname{sen} x) = \exp(x + o(x)) = 1 + x + o(x)$$
$$\exp(-x\cos x) = \exp(-x + o(x)) = 1 - x + o(x)$$
$$\log\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \approx \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} - 1 = \frac{2\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} = 2x + o(x)$$
$$f(x) \approx \frac{2x}{2x} \to 1$$

4.

$$-\varepsilon < \frac{1}{2}\left(\log\frac{4+x}{4-x} - \log 3\right) < \varepsilon \iff -2\varepsilon < \log\frac{4+x}{3(4-x)} < 2\varepsilon \iff$$
$$\iff e^{-2\varepsilon} < \frac{4+x}{3(4-x)} < e^{2\varepsilon}$$

Possiamo supporre $4 - x > 0$, cioè $x < 4$, il che non è restrittivo per la verifica.
Procedendo con i calcoli, si conclude che deve essere

$$4\,\frac{3e^{-2\varepsilon}-1}{3e^{-2\varepsilon}+1} < x < 4\,\frac{3e^{2\varepsilon}-1}{3e^{2\varepsilon}+1}$$

Si verifica facilmente che quello trovato è un intorno di 2 .

[C]

1.

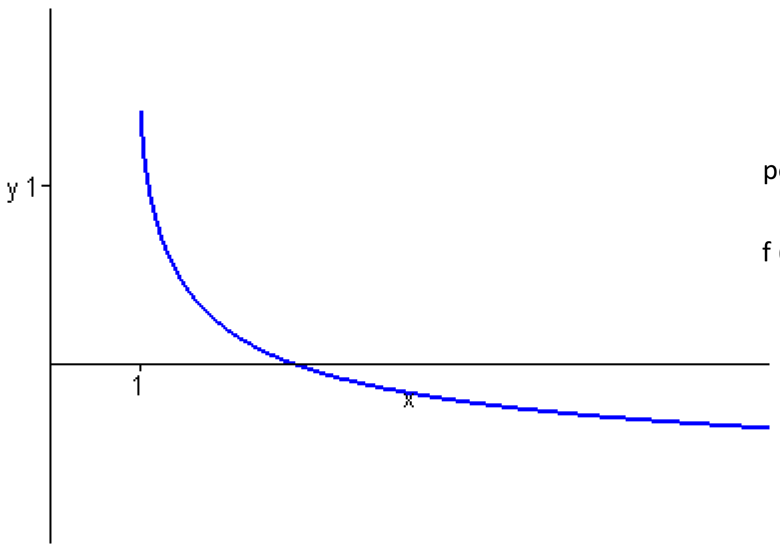
- C.E. $\begin{cases} x>0 \\ 1+\log x \neq 0 \\ \left|\dfrac{1-\log x}{1+\log x}\right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq 1/e \\ 1-2\log x+\log^2 x \leq 1+2\log x+\log^2 x \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1, +\infty)$
- zeri : la funzione si annulla per x = e
- $\arcsen \dfrac{1-\log x}{1+\log x} = k \Leftrightarrow \dfrac{1-\log x}{1+\log x} = \operatorname{sen} k \quad \text{se } k \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\Leftrightarrow \log x = \frac{1-\operatorname{sen} k}{1+\operatorname{sen} k} \quad \text{se } k \in (-\pi/2, \pi/2]$$

$$\Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{1-\operatorname{sen} k}{1+\operatorname{sen} k}\right)$$

Si verifica facilmente che la soluzione trovata sta nell'intervallo [1 , +∞)
Dunque la funzione è invertibile e la sua immagine è $(-\pi/2, \pi/2]$.

- Una funzione continua in un intervallo e iniettiva è monotòna.
- Grafico



per x -> +∞ f (x) -> -π/2

f (1) = π/2

2.

- Successione ben definita e positiva
- Proviamo per induzione che è $x_n \leq n / (n+1)$.
  Passo base: per n = 1 la maggiorazione diventa 0 ≤ 1, che è banalmente vera
  Induttività : dobbiamo provare che $x_n \leq n/(n+1) \Rightarrow x_{n+1} \leq (n+1)/(n+2)$.

$$x_{n+1} = \frac{n}{1+2n}(1+x_n) \le_{(*)} \frac{n}{1+2n}\left(1+\frac{n}{n+1}\right) \le_{(?)} \frac{n+1}{n+2}$$

In (*) abbiamo usato l'ipotesi.

Con semplici calcoli algebrici si trova che la seconda disequazione è sempre verificata.

- $x_{n+1} \ge x_n \iff \frac{n}{2n+1}(1+x_n) \ge x_n \iff .... \iff x_n \le \frac{n}{n+1}$

Per quanto verificato al passo precedente l'ultima condizione è sempre verificata; questo prova che la successione è crescente e dunque ammette limite, necessariamente finito perché $0 < x_n \le n / (n + 1) \to 1$. I punti fissi della successione verificano l'equazione $L = (1 + L) / 2$; dunque il limite vale 1.

3.

$$\mathrm{tg}\, x + x^2 = x + o(x)$$

$$\exp(\mathrm{tg}\, x + x^2) = \exp(x + o(x)) = 1 + x + o(x)$$

$$\sqrt{x + \mathrm{sen} x} = \sqrt{2x + o(x)}$$

$$\cos\sqrt{x + \mathrm{sen} x} = \cos\sqrt{2x + o(x)} = 1 - x + o(x)$$

$\log \mathrm{arctg}\, 2x - \log \mathrm{tg}\, x = \log (2x + o(x)) - \log (x + o(x)) = \log 2 + o(x)$

$$f(x) \approx \frac{x \log 2}{2x} \to \frac{\log 2}{2}$$

4.

$$-\varepsilon < \frac{\log x + 1}{2\log x - 1} - \frac{1}{2} < \varepsilon \iff -\varepsilon < \frac{3}{2\log x - 1} < \varepsilon \iff_{(*)} \frac{2\log x - 1}{3} > \frac{1}{\varepsilon} \iff$$

$$x > \exp\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{\varepsilon}\right)\right)$$

Si vede subito che quello trovato è un intorno di $+\infty$.

(*) abbiamo supposto $2 \log x - 1 > 0$, cioè $x > \sqrt{e}$, il che non è restrittivo per la verifica.

[D]

1.

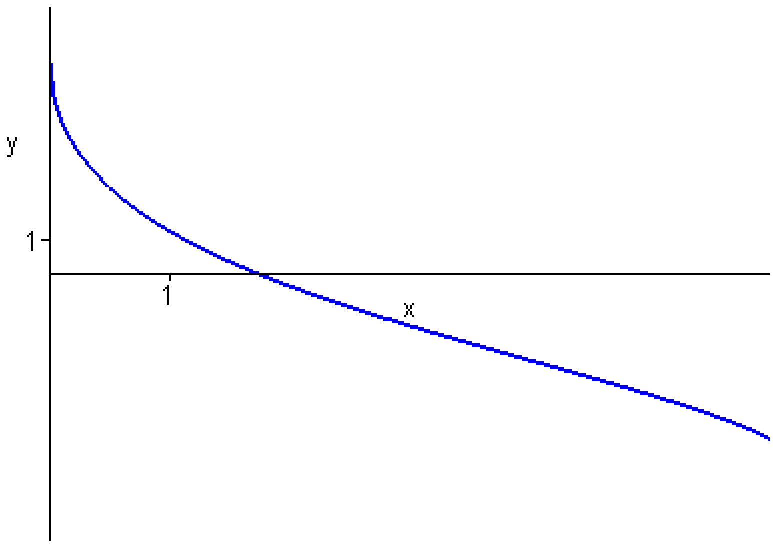
- C.E. $\begin{cases} x+1>0 \\ -1\le 1-\log(x+1)\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ 0\le \log(x+1)\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ 1\le x+1\le e^2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[0, e^2-1]$
- zeri : la funzione si annulla per x = e – 1.
- $4\,\text{arcsen}(1-\log(x+1)) = k \Leftrightarrow 1-\log(x+1) = \text{sen}(k/4)$

  se $k/4 \in [-\pi/2, \pi/2]$ cioè $k \in [-2\pi, 2\pi]$

  $\Leftrightarrow \log(x+1) = 1-\text{sen}(k/4) \Leftrightarrow x = -1+\exp(1-\text{sen}(k/4))$

  Si verifica facilmente che la soluzione trovata sta nell'intervallo $[0, e^2-1]$

  Dunque la funzione è invertibile e la sua immagine è $[-2\pi, 2\pi]$.
- Una funzione continua in un intervallo e iniettiva è monotòna.
- Grafico



$f(0) = 2\pi \qquad f(e^2-1) = -2\pi$

2.

- Successione ben definita e positiva
- Proviamo per induzione che è $x_n \le (n+1)/(n+2)$.

  Passo base: per n = 1 la maggiorazione diventa 1/2 ≤ 2/3, che è banalmente vera

  Induttività : dobbiamo provare che $x_n \le (n+1)/(n+2) \Rightarrow x_{n+1} \le (n+2)/(n+3)$.

  $$x_{n+1} = \frac{n+1}{3+2n}(1+x_n) \le_{(*)} \frac{n+1}{3+2n}\left(1+\frac{n+1}{n+2}\right) \le_{(?)} \frac{n+2}{n+3}$$

  In (*) abbiamo usato l'ipotesi.

  Con semplici calcoli algebrici si trova che la seconda disequazione è sempre verificata.
- $x_{n+1} \ge x_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n+3}(1+x_n) \ge x_n \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow x_n \le \frac{n+1}{n+2}$

  Per quanto verificato al passo precedente l'ultima condizione è sempre verificata; questo prova che la successione è crescente e dunque ammette limite, necessariamente finito perché $0 < x_n \le$

$(n + 1) / (n + 2) \to 1$. I punti fissi della successione verificano l'equazione $L = (1 + L) / 2$; dunque il limite vale 1.

3.

$$\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{1 - 2x^2 + o(x^2)} = 1 - x^2 + o(x^2)$$

$$\log \cos 2x \approx \cos 2x - 1 = -2x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) \approx \frac{x^2/2}{-2x^2} \to -1/4$$

4.

Si osservi che x può tendere a 0 solo da destra, dato che compare come argomento di un logaritmo.

$$-\varepsilon < \frac{\log x^2 + 1}{\log x + 1} - 2 < \varepsilon \quad \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{-1}{\log x + 1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow_{(*)} \frac{-1}{\log x + 1} < \varepsilon$$

(*) Abbiamo supposto $\log x + 1 < 0$, cioè $x < 1/e$, il che non è restrittivo per la verifica.
Procedendo con i calcoli, si conclude che deve essere

$$0 < x < \exp(-1 - 1/\varepsilon) .$$

Quello trovato è ovviamente un intorno destro di 0 .