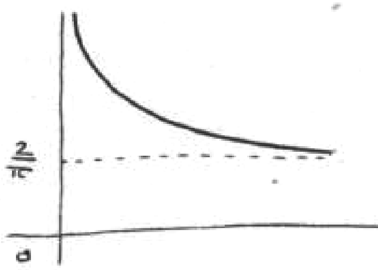
Soluzioni

1. C.E. $\begin{cases} -1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^x \le 1 \\ \arccos\left(\frac{1}{2}\right)^x \ne 0 \end{cases} \Longleftrightarrow 2^x > 1 \Longleftrightarrow x > 0$



SGN sempre positiva

LIM per $x \to 0^+$ $f(x) \to +\infty$ AS. VERTIC.
per $x \to +\infty$ $f(x) \to \frac{2}{\pi}$ AS. ORIZZ.

DRV $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x \lg \frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}}\, \arccos^2\left(\frac{1}{2}\right)^x} < 0$

La funzione è decrescente, dunque iniettiva e questo garantisce l'invertibilità.
La funzione inversa è definita in $\left(\frac{2}{\pi}, +\infty\right)$. Per calcolarne l'espressione, risolviamo l'equazione $\dfrac{1}{\arccos\left(\frac{1}{2}\right)^x} = \alpha$. Si ha successivamente:

$\arccos\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{\alpha} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \cos\frac{1}{\alpha} \Longleftrightarrow 2^x = \dfrac{1}{\cos\frac{1}{\alpha}} \Longleftrightarrow x = -\lg_2 \cos\frac{1}{\alpha}$.

I calcoli precedenti hanno senso per $\alpha > 2/\pi$, come già sappiamo.

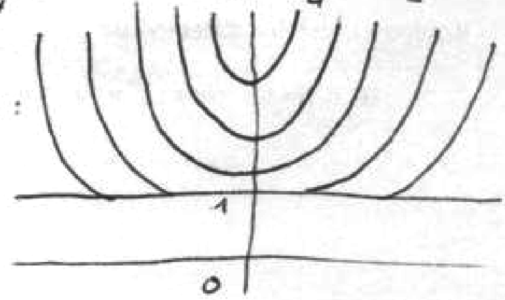
2. C.E. $x \in \mathbb{R}$, $y \ge 1$

$y = 1$ sol. costante

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{y-1}} = \int x\,dx \underset{\sqrt{y-1}=s}{\Longleftrightarrow} \int \frac{2}{1+s^2}\,ds = \frac{1}{2}(x^2+c) \Longleftrightarrow 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{y-1} = \frac{1}{2}(x^2+c)$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{arctg}\sqrt{y-1} = \frac{1}{4}(x^2+c) \Longleftrightarrow \sqrt{y-1} = \mathrm{tg}\,\frac{x^2+c}{4} \quad \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{x^2+c}{4} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Longleftrightarrow y = 1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{x^2+c}{4} \quad \text{se} \quad 0 < \frac{x^2+c}{4} < \frac{\pi}{2}.$$



Deve dunque essere $-c < x^2 < -c + 2\pi$ e quindi:

se $c < 0$: $\sqrt{-c} < |x| < \sqrt{-c+2\pi}$

se $0 \le c < 2\pi$: $|x| < \sqrt{-c+2\pi}$

3. Successione ben definita e positiva.

$x_{n+1} \le x_n \Longleftrightarrow \sqrt{\dfrac{1+x_n^2}{1+x_n}} \le x_n \Longleftrightarrow \dots \Longleftrightarrow x_n \ge 1$

$x_n > 1 \underset{?}{\Rightarrow} x_{n+1} > 1$ $\qquad \sqrt{\dfrac{1+x_n^2}{1+x_n}} > 1 \Longleftrightarrow 1 + x_n^2 > 1 + x \Longleftrightarrow x_n > 1$ (essendo $x_n > 0$)

Dunque la successione decresce e tende al punto fisso 1.
Per studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - 1)$ applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1} = \frac{\sqrt{\frac{1+x_n^2}{1+x_n}} - 1}{x_n - 1} = \frac{\sqrt{1+x_n^2} - \sqrt{1+x_n}}{\sqrt{1+x_n}\,(x_n-1)} = \frac{x_n(x_n-1)}{\sqrt{1+x_n}\,(x_n-1)\left(\sqrt{1+x_n^2}+\sqrt{1+x_n}\right)} \to \frac{1}{4} < 1$$

La serie converge.

4. Si pone $\sqrt{e^x-1} = t \to x = \lg(1+t^2)$, $dx = \dfrac{2t}{1+t^2}\,dt$

$$I = \int \frac{2t}{(1+t^2)(1+t)}\,dt \underset{\text{HERMITE}}{=} \int \left(-\frac{1}{1+t} + \frac{t+1}{t^2+1}\right)dt = -\lg|1+t| - \frac{1}{2}\lg(1+t^2) - \mathrm{arctg}\,t + c$$

$= \dots$

5. Per $x \to -\infty$ $f(x) \sim -x + 2x = x \to -\infty$. Il teorema della permanenza del segno assicura che la funzione è negativa in un intorno di $-\infty$.

$\sqrt{x^2+4} + 2x < -M \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+4} < -M - 2x \Longleftrightarrow \begin{cases} x \le -M/2 \\ x^2+4 < M^2+4Mx+4x^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \le -M/2 \\ x < \dfrac{-2M-\sqrt{M^2+12}}{3} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow x < \dfrac{-2M-\sqrt{M^2+12}}{3}$, che fornisce appunto un intorno di $-\infty$.