Soluzioni

1. $v = \dfrac{u' + bu}{a}$ $\downarrow$ $v' = \dfrac{u'' + bu'}{a}$ $\rightarrow$

Sostituendo nella seconda equazione:

$u'' + 2bu' + (a^2+b^2)u = 0$

con le C.I.

$u(0) = 0$, $u'(0) = a\,v(0) - b\,u(0) = a v_0$.

Il polinomio caratteristico $k^2 + 2bk + a^2 + b^2$ ha come radici $-b \pm ia$, a cui corrispondono le soluzioni $e^{-bx}\cos ax$, $e^{-bx}\operatorname{sen} ax$.

Dunque

$u(x) = e^{-bx}(c_1 \cos ax + c_2 \operatorname{sen} ax)$

$u'(x) = e^{-bx}((-bc_1 + ac_2)\cos ax + (-bc_2 - ac_1)\operatorname{sen} ax)$

Imponendo le C.I., si ottiene $u(x) = v_0 e^{-bx} \operatorname{sen} ax$.

Svolgendo i calcoli, si deduce $v(x) = v_0 e^{-bx} \cos ax$.

2. • $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$, $\quad g''(y) = -\dfrac{f''(g(y))\,g'(y)}{(f'(g(y)))^2} = -\dfrac{f''(g(y))}{[f'(g(y))]^3}$

• Studio di $f(x)$:

C.E. $\quad \sqrt{x^2+1} > -x \iff x > 0 \ \vee \begin{cases} x \le 0 \\ x^2+1 > x^2 \end{cases} \iff x \in \mathbb{R}$

DRV $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \Rightarrow f$ crescente in $\mathbb{R}$ e dunque invertibile

LIM $\quad$ per $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$ $\quad$ per $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$

Dunque $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

Essendo $g(0) = 0$, si ha $g'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$, $\quad g''(0) = -\dfrac{f''(0)}{[f'(0)]^3} = 0$

(infatti $f''(x) = x/(x^2+1)^{3/2}$).

La formula di Taylor diventa dunque $g(y) = y + o(y^2)$.

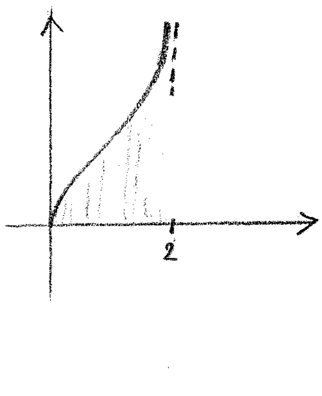
• Calcolo esplicito di $g(y)$

$\lg(x + \sqrt{x^2+1}) = y \iff \sqrt{x^2+1} = e^y - x \iff \begin{cases} e^y - x \ge 0 \\ x^2 + 1 = e^{2y} - 2e^y x + x^2 \end{cases}$

$x = \dfrac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \dfrac{1}{2}(e^y - e^{-y})$

Deve essere $e^y > \dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}$, che è sempre verificata ($\iff 2e^{2y} > e^{2y} - 1 \dots$)

Dunque $g(y) = \dfrac{1}{2}(e^y - e^{-y})$, da cui $g(y) = \dfrac{1}{2}\left[\left(1 + y + \dfrac{y^2}{2} + o(y^2)\right) - \left(1 - y + \dfrac{y^2}{2} + o(y^2)\right)\right] = y + o(y^2)$.

3. 

$$A = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

esiste perché per $x \to 2$ $f(x) \sim \dfrac{2}{\sqrt{2-x}}$ che è un infinito di ordine $1/2$.

Si pone $x = 2 \operatorname{sen} t$

$$A = 4\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t \, dt = 4\left[\frac{t - \operatorname{sen} t \cos t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

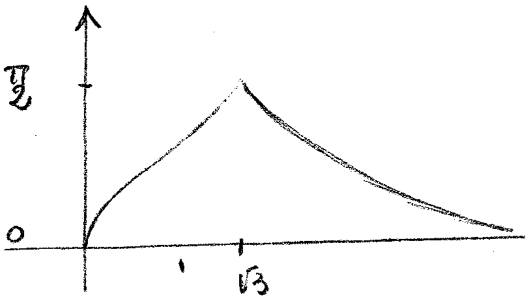
4.

C.E. $\begin{cases} x^4 - 5x^2 + 9 > 0 \\ \dfrac{x^2}{x^4-5x^2+9} \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 \leq x^4 - 5x^2 + 9 \end{cases} \iff (x^2-3)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Essendo pari possiamo studiarla per $x \geq 0$

SGN fz positiva, $f(0) = 0$

LIM $x \to +\infty \quad f(x) \to 0$



DRV $f'(x) = \operatorname{sgn}(3-x^2)\,\dfrac{3+x^2}{x^4-5x^2+9}$

$x = \sqrt{3}$ punto angoloso