Soluzioni

1. $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \frac{e^x-1}{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} + e^{\xi}\frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{h=0}^{n-1}\frac{x^h}{(h+1)!} + \frac{e^{\xi} x^n}{(n+1)!}$$

$\int_0^{1/2} \frac{e^x-1}{x}\,dx$ esiste perché la funzione ha in $x=0$ una discontinuità eliminabile

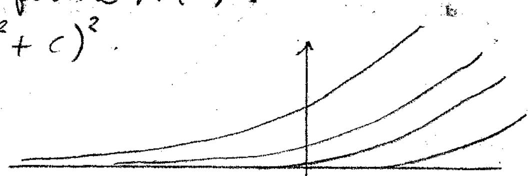
$$\int_0^{1/2} \frac{e^{\xi} x^n}{(n+1)!}\,dx < \frac{2}{(n+1)!}\int_0^{1/2} x^n\,dx = \frac{1}{2^n(n+1)(n+1)!} < 10^{-3} \quad \text{per } n \geq 4$$

$$\int_0^{1/2}\frac{e^x-1}{x}\,dx \sim \sum_{h=0}^{3}\frac{1}{(h+1)!}\int_0^{1/2}x^h\,dx = \sum_{h=0}^{3} \frac{1}{(h+1)(h+1)!\,2^{h+1}} = \frac{2627}{4608} \sim 0,570$$

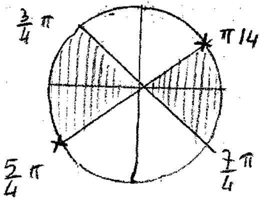
2. Che $y=0$ sia soluzione è ovvio. Per trovare le altre soluzioni, poniamo $z=\sqrt{y}$, cioè $y=z^2$ e dunque $y'=2zz'$; si ottiene $2zz' = z^2 + e^x z$, ovvero (per $z \neq 0$) $z' - \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}e^x$, che è un'eq. lineare del primo ordine. Dato che è a coeff. costanti, si può procedere (invece che nel modo consueto) con il metodo del polinomio caratteristico ($P(\lambda)=\lambda-\frac{1}{2}$) seguito da quello delle fz. simili (slz. particolare della forma Ae^x):

$$z = e^x + c\,e^{x/2} \quad \to \quad y = e^x\left(e^{x/2}+c\right)^2.$$

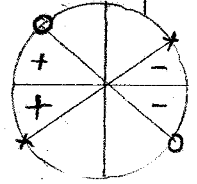
Deve essere $e^{x/2}+c>0 \to \begin{cases} \text{se } c \geq 0,\ x\in\mathbb{R} \\ \text{se } c<0,\ x>\lg c^2 \end{cases}$



3. C.E. $\begin{cases} \operatorname{sen} x \neq \cos x \\ 1-2\operatorname{sen}^2 x \geq 0 \end{cases}$

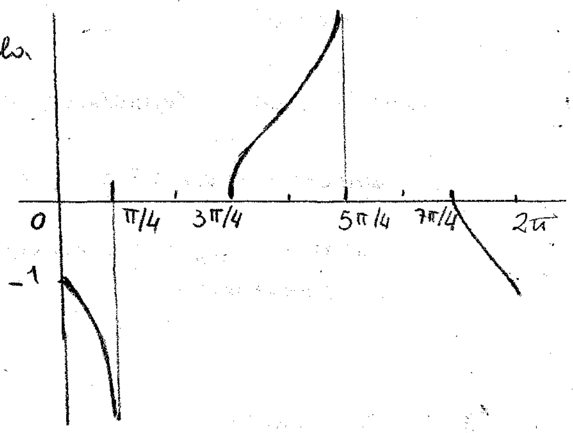


SGN



LIM per $x \to \frac{\pi}{4}^-$ $f(x) \to -\infty$ per $x \to \frac{5}{4}\pi^-$ $f(x) \to +\infty$ (ad es., usando Hôpital)

DRV $f'(x) = \dfrac{1}{(\operatorname{sen} x - \cos x)\sqrt{1-2\operatorname{sen}^2 x}}$ ha lo stesso sgn. della fz; $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$ punti a tg. verticale



4. Al IV ordine:

$$f(x) = \left(\frac{1}{a}+b\right)x + \left(-\frac{1}{2a^2}+\frac{b^2}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3a^3}+\frac{b^3}{6}-\frac{1}{6}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{4a^4}+\frac{b^4}{24}\right)x^4 + o(x^4)$$

coeff. I ordine: $\frac{1}{a}+b=0$ per $b=-\frac{1}{a}$
coeff. II ordine: nullo
coeff. III ordine: $\frac{1}{6a^3}-\frac{1}{6}=0$ per $a=1$ ($\to b=-1$)
coeff. IV ordine: $-5/24$

La fz è infinitesima di ordine massimo 4 per $a=1$, $b=-1$; la sua p.p. è $-\frac{5}{24}x^4$.

5. $f(x) = x - \lg(x^2-2x)$

$f'(x) = \dfrac{x^2-4x+2}{x^2-2x} > 0$ nell'interv. di integraz.; $f(-1)<0$.

$$A = \int_{-2}^{-1}\left(\lg(x^2-2x) - x\right)dx$$

$$\int \lg(x^2-2x)\,dx = x\lg(x^2-2x) - 2\int \frac{x-1}{x-2}\,dx = x\lg(x^2-2x) - 2\int\left(1-\frac{1}{x-2}\right)dx = \ \ldots\ldots$$