Metodo del polinomio caratteristico per le equazioni omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione omogenea $y'' + a y' + b y = 0$ con coefficienti a, b **costanti (reali)** e cerchiamone una soluzione esponenziale: $\mathbf{e^{kx}}$, con $\mathbf{k} \in \mathbf{C}$.
Ricordando la derivata di una funzione a valori complessi, se imponiamo che questa funzione risolva l'equazione, si trova che deve essere

$$(k^2 + a k + b) e^{kx} = 0 \quad \forall x.$$

Poiché l'esponenziale complesso (come quello reale) è sempre diverso da 0, la condizione precedente equivale a imporre che k sia una radice del polinomio $P(k) = k^2 + a k + b$ detto **polinomio caratteristico.**

Distinguiamo tre possibili casi:

(i) **il polinomio ha due radici reali distinte**

Indicate con k_1, k_2 queste due radici, restano individuate due soluzioni dell'equazione differenziale:

$$e^{k_1 x}, \quad e^{k_2 x}.$$

Queste due funzioni sono indipendenti.

In caso contrario sarebbe

$$e^{k_1 x} / e^{k_2 x} = \text{costante},$$

cioè

$$e^{(k_1 - k_2) x} = \text{costante},$$

cosa che può accadere solo se $k_1 - k_2 = 0$, cioè se $k_1 = k_2$.

(ii) **il polinomio ha un'unica radice reale (con molteplicità 2)**

Questo caso si presenta se $a^2 - 4b = 0$, cioè se l'equazione è nella forma

$$y'' + a y' + \frac{a^2}{4} y = 0 .$$

La radice del polinomio caratteristico è $-a/2$ e ad essa corrisponde la soluzione $y(x) = e^{-ax/2}$.

Cerchiamo una seconda soluzione, indipendente dalla prima, nella forma

$$c(x)\ e^{-ax/2}$$

con $c(x)$ funzione non costante da determinare opportunamente.

Imponendo che questa funzione risolva l'equazione (svolgere i calcoli !) , si trova che deve essere

$$c''(x)\ e^{-ax/2} = 0 ,$$

cioè $c'' = 0$, da cui segue prima $c' = \lambda$ e poi

$$c(x) = \lambda x + \mu .$$

(λ e μ costanti arbitrarie). In particolare possiamo assumere $\lambda = 1$ e $\mu = 0$, ottenendo $c(x) = x$. In questo modo si ottiene come seconda soluzione dell'equazione omogenea la funzione

$$x\ e^{-ax/2} ,$$

indipendente dalla prima.

(iii) **il polinomio ha due radici complesse (coniugate)**

Indicate queste radici con $\alpha \pm i\beta$, l'equazione differenziale ammette le soluzioni complesse

$$e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \,\text{sen}\, \beta x)$$

$$e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \,\text{sen}\, \beta x) .$$

Prendendo la parte reale e quella immaginaria di una delle due (è indifferente quale), si deducono due soluzioni reali indipendenti:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \quad , \quad e^{\alpha x} \,\text{sen}\, \beta x \ .$$

Esempi

1. $y'' + 3 y' - 10 y = 0$

Il polinomio caratteristico $k^2 + 3k - 10 = 0$ ha per radici $k = 2$ e $k = -5$ a cui corrispondono due soluzioni indipendenti dell'equazione date da e^{2x}, e^{-5x} ; le combinazioni lineari di questi due esponenziali danno tutte le soluzioni dell'equazione.

2. $y'' + 2 y' + y = 0$

Il polinomio caratteristico $k^2 + 2k + 1 = 0$ ha come unica radice $k = -1$. Due soluzioni indipendenti dell'equazione sono e^{-x} , $x e^{-x}$.

3. $y'' + 6 y' + 25 y = 0$

Il polinomio caratteristico $k^2 + 6k + 25 = 0$ ha due radici complesse coniugate $k = -3 \pm 4i$. Due soluzioni indipendenti dell'equazione sono dunque $e^{-3x} \cos 4x$, e^{-3x} sen $4x$.

4. $y'' + y' + y = 0$

Il polinomio caratteristico $k^2 + k + 1 = 0$ ha per radici $k = (-1 \pm i \sqrt{3}) / 2$.

Due soluzioni indipendenti dell'equazione sono

$$e^{-x/2} \cos(\sqrt{3}\, x / 2), \quad e^{-x/2} \operatorname{sen}(\sqrt{3}\, x / 2).$$

5. $y'' + y = 0$

Il polinomio caratteristico $k^2 + 1 = 0$ ha due radici complesse coniugate $k = \pm i$. Due soluzioni indipendenti dell'equazione sono $\cos x$, $\operatorname{sen} x$.

6. $y'' + y' = 0$

Il polinomio caratteristico $k^2 + k = 0$ ha due radici reali $k = 0$ e $k = -1$. Due soluzioni indipendenti dell'equazione sono 1, e^{-x}.

<u>Osservazione</u>

Le combinazioni lineari $c_1 \cos wx + c_2 \operatorname{sen} wx$ si interpretano in fisica come sovrapposizione di due onde con lo stesso periodo (ovvero, con la stessa frequenza, che del periodo è l'inversa). Utilizzando un pò di trigonometria, si possono riscrivere come un'unica onda con ampiezza $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, con lo stesso periodo, ma in differenza di fase:

$$c \cos(w x + \varphi) = c \cos w (x - x_0)$$

oppure

$$c \operatorname{sen}(w x + \varphi) = c \operatorname{sen} w (x - x_0).$$

Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: metodo dei coefficienti indeterminati o delle funzioni simili per la ricerca di una soluzione particolare <u>dell'equazione completa</u>

Consideriamo l'equazione completa $y'' + a\,y' + b\,y = f(x)$ a coefficienti costanti. Il metodo che stiamo per esporre permette di determinare una soluzione dell'equazione **se il termine noto è una funzione di tipo particolare** , più precisamente del tipo $P(x)\,e^{kx}$, dove $P(x)$ è un polinomio e k un numero complesso.
Il procedimento consiste nel cercare una soluzione della stessa forma del termine noto , cioè della forma $Q(x)\,e^{kx}$, dove $Q(x)$ è un polinomio dello stesso grado di $P(x)$, con coefficienti da determinare.
Calcoliamo derivata prima e seconda di questa funzione , sostituiamo nell'equazione e imponiamo che sia risolta.

Derivata prima $\quad Q'(x)\,e^{kx} + Q(x)\,k\,e^{kx}$

derivata seconda $\quad Q''(x)\,e^{kx} + 2k\,Q'(x)\,e^{kx} + k^2\,Q(x)\,e^{kx}$

Sostituiamo nell'equazione , raccogliamo i termini e semplifichiamo il termine e^{kx} che è diverso da 0 , in modo da ottenere :

$$Q'' + (2k + a)\,Q' + (k^2 + ak + b)\,Q = P$$

Se indichiamo con $\mathcal{P}(x)$ il polinomio caratteristico dell'equazione, possiamo riscrivere :

$$Q'' + \mathcal{P}'(k)\,Q' + \mathcal{P}(k)\,Q = P. \qquad (*)$$

Se $\mathcal{P}(k)$ è diverso da 0, cioè se k non è radice del polinomio caratteristico, nella (*) compaiono a primo e a secondo membro due polinomi dello stesso grado ; uguagliandoli, si determinano i coefficienti di $Q(x)$ e quindi si trova una soluzione particolare dell'equazione differenziale di partenza.

Se $\mathcal{P}$ (k) è uguale a 0 , ma $\mathcal{P}'$ (k) è diverso da 0 (cioè se k è radice semplice del polinomio caratteristico) , il polinomio a sinistra ha grado inferiore ad 1 rispetto al polinomio a destra. Non è dunque possibile trovare Q (x) che soddisfi la (*) . Perchè il procedimento ritorni a funzionare , cerchiamo una soluzione nella forma x Q (x) $e^{k x}$.

Se infine $\mathcal{P}$ (k) e $\mathcal{P}'$ (k) sono entrambi uguali a 0 , (cioè se k è radice doppia del polinomio caratteristico) , il polinomio sulla sinistra ha grado inferiore a 2 rispetto al polinomio a destra. Perché il procedimento permetta di ricavare Q , cerchiamo una soluzione nella forma x^2 Q (x) $e^{k x}$.

Esempi

1. **f (x) = P (x)** polinomio di grado n

Rispetto al caso generale, qui è k = 0.
Dobbiamo dunque controllare se 0 è o non è radice del polinomio caratteristico $k^2 + a k + b$.

se b ≠ 0 si cerca una soluzione nella forma Q (x)
se b = 0, a ≠ 0 si cerca una soluzione nella forma x Q (x)
se b = 0, a = 0 si cerca una soluzione nella forma x^2 Q (x).

In tutti i casi Q (x) indica un generico polinomio di grado n come P (x).

- $y'' + 3 y' + 2 y = x^2 - 4 x$

Si cerca una soluzione nella forma $y = A x^2 + B x + C$.
Imponendo che questa funzione risolva l'equazione, si ottiene che deve essere

$$A = 1 / 2 \quad , \quad B = - 7 / 2 \quad , \quad C = 19 / 4$$

e dunque otteniamo la soluzione

$$\bar{y} = \frac{1}{2} x^2 - \frac{7}{2} x + \frac{19}{4} .$$

- $y'' + 3y' = x^2 - 4x$

Cerchiamo una soluzione nella forma $A x^3 + B x^2 + C x$.

- $y'' = x^2 - 4x$

Si cerca una una soluzione nella forma:

$$x^2 Q(x) = A x^4 + B x^3 + C x^2 .$$

2. **$f(x) = c \ e^{kx}$**

Rispetto al caso generale , qui P (x) è identicamente uguale ad 1 , dunque in particolare un polinomio di grado 0.

se k non è radice del polinomio caratteristico:
si cerca una soluzione nella forma A exp (k x) ,

se k è radice semplice del polinomio caratteristico:
si cerca una soluzione nella forma A x exp (k x) ,

se k è radice doppia del polinomio caratteristico:
si cerca una soluzione nella forma A x^2 exp (k x) .

- $y'' + y = e^x$

k = 1 non è radice del polinomio caratteristico $k^2 + 1$.
Si cerca una soluzione nella forma $A e^x$; sostituendo, si trova che deve essere 2 A = 1, cioè A = 1 / 2.

- $y'' - y = e^x$

k = 1 è radice del polinomio caratteristico $k^2 - 1$.
Si cerca una soluzione nella forma $A x e^x$; sostituendo, si trova che deve essere 2 A = 1, cioè A = 1 / 2.

- $y'' - 2y' + y = e^x$

k = 1 è radice (doppia) del polinomio caratteristico $k^2 - 2k + 1$.
Si cerca una soluzione nella forma $A x^2 e^x$; sostituendo, si trova che deve essere 2 A = 1, cioè A = 1 / 2.

3. **f (x) = c cos w x , f (x) = c sen w x** (con $w \neq 0$)

Le due funzioni sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria dell'esponenziale complesso $c\ e^{iwx}$.
Consideriamo l'equazione che ha questo esponenziale come termine noto e cerchiamone una soluzione complessa come abbiamo visto nel caso precedente: la parte reale risolve l'equazione con termine noto c cos wx, la parte immaginaria quella con termine noto c sen wx.

Riassumendo, si passa all'equazione con termine noto complesso $c\ e^{iwx}$:

se i w non è radice del polinomio caratteristico:

si cerca una soluzione complessa nella forma $A e^{iwx}$,

se i w è radice del polinomio caratteristico (necessariamente semplice: l'altra radice è - i w):

si cerca una soluzione complessa nella forma $A x e^{iwx}$

(in entrambi i casi $A \in \mathbf{C}$).
Trovata questa soluzione complessa, la parte reale risolve l'equazione con termine noto c cos w x, la parte immaginaria quella con termine noto c sen w x.

- $y'' + y = \text{sen } 2x$;

l'equazione complessa associata è

$$z'' + z = e^{2ix}.$$

Poiché 2i non è radice del polinomio caratteristico $k^2 + 1$, cerchiamo una soluzione complessa $A e^{2ix}$; sostituendo nell'equazione, si trova che deve essere $A = -1/3$. Della soluzione complessa $-e^{2ix}/3$ prendiamo la parte immaginaria, cioè la funzione $-\text{sen}(2x)/3$: questa risolve l'equazione (reale) data.

- $y'' + y = \cos x$.

L'equazione complessa associata è

$$z'' + z = e^{ix}.$$

Il polinomio caratteristico ha i come radice: cerchiamo dunque una soluzione nella forma $A x e^{ix}$. Sostituendo nell'equazione , si trova che deve essere $A = -i/2$.
Della soluzione complessa $-ix\, e^{ix}/2 = -ix(\cos x + i \,\text{sen} x)/2$ prendiamo la parte reale $x \,\text{sen}\, x / 2$; questa risolve l'equazione data.

4. **$f(x) = P(x)\, e^{kx}$** , $P(x)$ polinomio di grado n

se k non è radice del polinomio caratteristico:

si cerca una soluzione nella forma $Q(x)\, e^{kx}$, per un opportuno polinomio di grado n

se k è radice semplice del polinomio caratteristico:

si cerca una soluzione nella forma $x\ Q(x)\ e^{kx}$

se k è radice doppia del polinomio caratteristico:

si cerca una soluzione nella forma $x^2\ Q(x)\ e^{kx}$.

Ad esempio:

$$y'' - y = x\ e^x$$

Poiché 1 è radice semplice del polinomio caratteristico, si cerca una soluzione nella forma $x(Ax + B)\ e^x$.
Sostituendo, si trova che deve essere $4Ax + 2(A + B) = x$ e quindi $A = 1/4$, $B = -1/4$. Otteniamo in tal modo la soluzione particolare:

$$x(x-1)\,e^x / 4 .$$

5. **$f(x) = P(x)\cos wx$, $f(x) = P(x)\ \mathrm{sen}\, wx$**

$P(x)$ polinomio di grado n, $w \neq 0$

Scriviamo l'equazione complessa con $Q(x)\ e^{iwx}$ come termine noto; in questo modo ci riconduciamo al caso studiato precedentemente.

- **Se iw non è radice del polinomio caratteristico**, si cerca una soluzione complessa nella forma **$Q(x)\ e^{iwx}$**, con $Q(x)$ polinomio di grado n
- **Se iw è radice del polinomio caratteristico** (necessariamente radice semplice, perché l'altra è $-iw$) , si cerca una soluzione nella forma **$x\,Q(x)\ e^{iwx}$** .

Una volta trovata una soluzione particolare dell'equazione complessa, se ne prende la parte reale o quella immaginaria, a seconda che il termine noto reale iniziale contenga il coseno o il seno.

- $y'' - y = x \cos x$.

L'equazione complessa associata è $z'' - z = x e^{ix}$.
i non è radice del polinomio caratteristico: si cerca dunque una soluzione $(Ax + B) e^{ix}$. Sostituendo, si trova $A = -1/2$, $B = -i/2$. Si ottiene in tal modo la soluzione complessa:

$$z(x) = -(x + i) e^{ix} / 2 .$$

La sua parte reale, cioè la funzione

$$(\operatorname{sen} x - x \cos x) / 2,$$

è soluzione particolare dell'equazione proposta.

6. $\mathbf{f(x) = P(x)\, e^{kx} \cos wx}$,
   $\mathbf{f(x) = P(x)\, e^{kx} \operatorname{sen} wx}$

$P(x)$ polinomio di grado n, $w \neq 0$

Scriviamo l'equazione complessa associata, di termine noto $Q(x)\, e^{(k+iw)x}$; procedendo come già visto :

se $k + iw$ non è radice del polinomio caratteristico:

si cerca una soluzione nella forma $R(x)\, e^{(k+iw)x}$, R polinomio di grado n

se $k + i w$ è radice del polinomio caratteristico (necessariamente semplice: l'altra radice è $k - i w$):

si cerca una soluzione nella forma $x R(x) e^{(k+iw)x}$.

Una volta trovata questa soluzione complessa, la sua parte reale risolve l'equazione con termine noto $Q(x) e^{kx} \cos w x$, la sua parte immaginaria quella con termine noto $Q(x) e^{kx} \operatorname{sen} w x$.

- $y'' + y = x \operatorname{sen} x \, e^x$.

L'equazione complessa associata ha termine noto $x e^{(1+i)x}$. Poiché $1 + i$ non è radice del polinomio caratteristico, si cerca una soluzione nella forma

$$(A x + B) e^{(1+i)x}.$$

Sostituendo, si ottiene che deve essere

$$A = (1 - 2i)/5 \quad , \quad B = -2(1 - 7i)/25;$$

la parte immaginaria della soluzione é dunque

$$\left(-\frac{2}{5} x + \frac{14}{25} \right) \cos x + \left(\frac{1}{5} x - \frac{2}{25} \right) \operatorname{sen} x .$$

Osservazione

I metodi precedenti (polinomio caratteristico, coefficienti indeterminati) si possono usare anche per equazioni lineari del primo ordine **a coefficiente costante**, in alternativa (di solito più semplice) al metodo generale che abbiamo visto.
Ad esempio, consideriamo l'equazione

$$y' + 2x = \cos x.$$

Cercando una soluzione dell'equazione omogenea nella forma esponenziale e^{kx}, si ottiene il polinomio caratteristico $k + 2$. Alla radice $k = -2$ corrisponde la soluzione $y_0(x) = e^{-2x}$ dell'equazione.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa, passiamo in campo complesso. Cerchiamo una soluzione $\bar{z}(x) = A\, e^{ix}$: si trova che deve essere $A = 1/(2+i) = (2-i)/\sqrt{5}$. La parte reale $\bar{y} = (2\cos x + \operatorname{sen} x)/\sqrt{5}$ risolve l'equazione completa.

Equazioni lineari del secondo ordine: metodo di variazione delle costanti arbitrarie per la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa quando si conoscono due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea.

Sia $y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x)$ un'equazione a coefficienti non necessariamente costanti, tale però che si conoscono due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata: $y_1(x)$, $y_2(x)$.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione nella forma:

$$\bar{y}(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x),$$

dove $c_1(x)$, $c_2(x)$ sono <u>due funzioni</u> da determinare.

Dato che abbiamo due funzioni da determinare e una sola condizione da imporre, possiamo sceglierne una seconda in modo da semplificare i calcoli.
Derivando, si trova

$$\bar{y}' = c_1'\, y_1 + c_1\, y_1' + c_2'\, y_2 + c_2\, y_2' .$$

Poniamo (prima condizione):

$$c_1' \, y_1 + c_2' \, y_2 = 0 .$$

Tenendo conto di questa condizione, la derivata seconda diventa:

$$\bar{y}'' = c_1' \, y_1' + c_2' \, y_2' + c_1 \, y_1'' + c_2 \, y_2'' .$$

Sostituendo nell'equazione e semplificando, si trova:

$$c_1' \, y_1' + c_2' \, y_2' = f(x) .$$

Il sistema così ottenuto

$$\begin{cases} c_1' \, y_1 + c_2' \, y_2 = 0 \\ c_1' \, y_1' + c_2' \, y_2' = f(x) \end{cases} \qquad (*)$$

nelle incognite c_1', c_2' ha una ed una sola soluzione, poiché la matrice dei suoi coefficienti (**matrice wronskiana)** ha determinante non nullo, per ogni valore di x.

Infatti, essendo y_1 e y_2 indipendenti, l'equazione $\lambda \, y_1 + \mu \, y_2 = 0$ nelle incognite λ, μ ha come unica soluzione $\lambda = \mu = 0$.
La stessa conclusione vale dunque per il sistema

$$\begin{cases} \lambda \, y_1 + \mu \, y_2 = 0 \\ \lambda \, y_1' + \mu \, y_2' = 0 \end{cases} .$$

Ma questo può accadere solo se la matrice dei coefficienti ha determinante non nullo.

☑

Risolvendo il sistema (*) mediante la regola di Cramer, si trova

$$c_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}} \quad , \quad c_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}$$

e da queste si deducono per integrazione c_1, c_2.

Esempi

1.

$$\mathbf{y'' + y = tg^2 x}$$

Il polinomio caratteristico ha per radici i numeri ± i; dunque una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea é data dalle funzioni senx, cosx.
Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione nella forma

$$\bar{y} = c_1(x)\ \mathrm{sen}\,x + c_2(x)\ \cos x$$

Procedendo come nel caso generale, si trova che le due funzioni incognite verificano il sistema

$$\begin{cases} c_1'\ \mathrm{sen}\,x + c_2'\cos x = 0 \\ c_1'\cos x - c_2'\ \mathrm{sen}\,x = tg^2\,x \end{cases}$$

Deve dunque essere:

$$c_1'(x) = \frac{\mathrm{sen}^2\,x}{\cos x} \quad , \quad c_2'(x) = -\frac{\mathrm{sen}^3\,x}{\cos^2 x} \ ,$$

da cui, per integrazione, si arriva a:

$$c_1(x) = -\mathrm{sen}\,x + \log\left|\frac{1+\mathrm{sen}\,x}{1-\mathrm{sen}\,x}\right|^{1/2} \quad , \quad c_2(x) = -\cos x - \frac{1}{\cos x}.$$

La soluzione particolare cercata ha dunque l'espressione

$$\overline{y}(x) = -2 + \operatorname{sen} x \log \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}\,.$$

Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione é:

$$y(x) = -2 + \operatorname{sen} x \log \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} + a \operatorname{sen} x + b \cos x\,.$$

2.

$$\mathbf{y'' + y = 1 / \cos x}$$

Come prima, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione nella forma

$$\overline{y}(x) = c_1(x) \operatorname{sen} x + c_2(x) \cos x$$

con le due funzioni incognite che verificano il sistema

$$\begin{cases} c_1' \operatorname{sen} x + c_2' \cos x = 0 \\ c_1' \cos x - c_2' \operatorname{sen} x = 1/\cos x \end{cases}$$

Deve dunque essere:

$$c_1'(x) = 1 \quad , \quad c_2'(x) = -\operatorname{tg} x$$

da cui, per integrazione, si arriva a:

$$c_1(x) = x \quad , \quad c_2(x) = \log|\cos x|\,.$$

La soluzione particolare cercata ha l'espressione

$$\overline{y}(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x \log|\cos x|\,.$$

Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione é:

$$y(x) = x \operatorname{sen} x + \cos x \log|\cos x| + a \operatorname{sen} x + b \cos x .$$

3.

$$\mathbf{y'' + 4y' + 4y = \exp(-2x) / x} \quad , \quad x > 0$$

Il polinomio caratteristico ha come unica radice -2; lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea ha come base le due funzioni

$$\exp(-2x) \quad , \quad x \exp(-2x).$$

Cerchiamo una soluzione particolare nella forma:

$$\overline{y}(x) = c_1(x) \exp(-2x) + c_2(x)\, x \exp(-2x) .$$

Le funzioni da determinare soddisfano il sistema

$$\begin{cases} c_1' + x\, c_2' = 0 \\ -2 c_1' \cos x + (1 - 2x^2)\, c_2' = 1/x \end{cases} .$$

Risolvendo, si ottiene

$$c_1' = -1 \quad , \quad c_2' = 1/x$$

da cui:

$$c_1 = -x \quad , \quad c_2 = \log x .$$

Abbiamo così trovato la soluzione particolare:

$$\overline{y}(x) = x\,(\log x - 1) \exp(-2x).$$

L'integrale generale é

$$y(x) = \exp(-2x)\left\{ a + bx + x(\log x - 1)\right\}.$$

Data l'arbitrarietà delle costanti, sostituendo b - 1 con b, possiamo riscrivere

$$y(x) = \exp(-2x)\ \{ a + b x + x \log x \}.$$

Equazioni lineari del secondo ordine: metodo di riduzione dell'ordine per trovare una soluzione dell'equazione omogenea quando già se ne conosca una

Se dell'equazione omogenea

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$$

si conosce una soluzione non nulla $y_1(x)$, si può determinare una seconda soluzione, indipendente dalla prima, cercandola nella forma

$$y_2(x) = c(x)\, y_1(x)\ ,$$

dove $c(x)$ è una funzione incognita.
Sostituendo nell'equazione, si trova un'equazione lineare del primo ordine nell'incognita $c'(x)$; risolvendola e scegliendone una soluzione non nulla, si può determinare (in modo non unico) $c(x)$ e dunque la soluzione cercata dell'equazione di partenza.

Esempio

$$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + 2y = 0$$

La funzione $y(x) = x$ é una soluzione, come si verifica direttamente per sostituzione; cerchiamo una seconda soluzione, indipendente da questa, nella forma $x\, c(x)$.
Sostituendo, si trova che la funzione $c(x)$ deve verificare l'equazione del secondo ordine:

$$(1 - x^2)\, x\, c'' + 2(1 - 2x^2)\, c' = 0 .$$

Si può abbassare l'ordine dell'equazione se si pone $c'(x) = z(x)$, ottenendo

$$(1 - x^2)\, x\, z' + 2(1 - 2x^2)\, z = 0 ;$$

risolvendo questa equazione del primo ordine, si trova (fare i calcoli !)

$$z(x) = \frac{k}{x^2(1 - x^2)} ,$$

essendo k una costante arbitraria. Integrando ulteriormente, si ottiene:

$$c(x) = k\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) + h .$$

Scegliendo ad esempio $k = 1$ e $h = 0$, si arriva così alla funzione

$$y(x) = -1 + \frac{x}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

che è una soluzione dell'equazione omogenea di partenza, indipendente dalla soluzione inizialmente trovata.