Funzioni derivabili convesse o concave

Definizione

Sia f (x) una funzione definita e derivabile in un intervallo I.

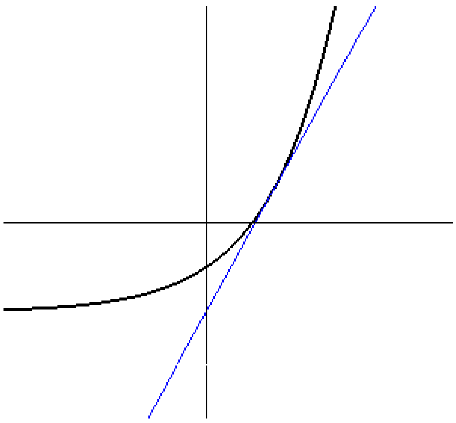
Diciamo che f è **convessa** in I se $\forall\, x_0 \in I$ risulta:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad , \quad \forall\, x \in I - \{x_0\}.$$

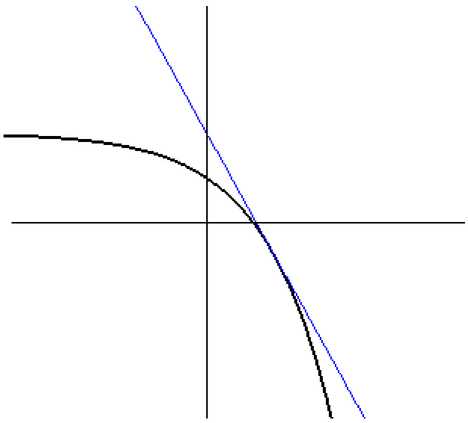
Analogamente, diciamo che f è **concava** in I se $\forall\, x_0 \in I$ risulta:

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad , \quad \forall\, x \in I - \{x_0\}.$$

In entrambe le definizioni si confronta il grafico della funzione con quello delle sue rette tangenti: nel primo caso il grafico sta al di sopra di tutte le rette tangenti, nel secondo caso sta al di sotto.



funzione convessa



funzione concava

Osservazione

Esiste una definizione più generale di convessità e di concavità che non richiede la derivabilità della funzione.

Definizione

Un punto si dice di **flesso** per una funzione se separa un intervallo di convessità da uno di concavità (o viceversa).

Se nell'intervallo I la funzione è dotata di derivata seconda, valgono i seguenti risultati:

Se $f''(x) > 0$ in I, f è convessa in I

Se $f''(x) < 0$ in I, f è concava in I

dimostrazione

Proviamo l'enunciato sulla convessità.

Fissati $x_0, x \in I$ $(x_0 \neq x)$, dobbiamo provare che risulta:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ovvero

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} > f'(x_0) & \text{se } x > x_0 \\ < f'(x_0) & \text{se } x < x_0 \end{cases} .$$

Applicando il teorema di Lagrange alla funzione f (x) nell'intervallo di estremi x_0 e x, il primo membro si può scrivere come $f'(\xi)$, dove ξ è un opportuno punto compreso tra x_0 e x. Dobbiamo dunque provare che:

$$x_0 < \xi < x \quad \Rightarrow \quad f'(\xi) > f'(x_0)$$

$$x < \xi < x_0 \quad \Rightarrow \quad f'(\xi) < f'(x_0).$$

L’ipotesi sulla derivata seconda implica che la funzione derivata f ‘ è strettamente crescente (infatti la sua derivata - cioè f " - è maggiore di 0); questo basta a provare l’asserto.

☑

Osservazione

I due asserti non possono essere invertiti. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = x^4, \quad x \in \mathbf{R}$$

è convessa, ma $f''(x) = 12x^2$ non è strettamente positiva, annullandosi per $x = 0$.

Vale, però, il seguente risultato:

Se f è convessa in I, $f''(x) \geq 0$ in I

Se f è concava in I, $f''(x) \leq 0$ in I .

dimostrazione

Dimostriamo l’enunciato sulla convessità, facendo vedere che f ’ è una funzione crescente e quindi la sua derivata (cioè f ") è maggiore o uguale a 0.

Vogliamo dunque provare che:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f'(x_1) < f'(x_2).$$

Nella definizione di convessità

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

prendiamo prima $x = x_1$, $x_0 = x_2$, poi viceversa:

$$f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

$$f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

ovvero (tenendo presente che $x_1 < x_2$):

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < f'(x_2)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_1).$$

Poiché nelle due disuguaglianze i primi membri sono ovviamente uguali, si deduce che deve essere

$$f'(x_1) < f'(x_2)$$

che è appunto quanto volevamo provare.

☑

Se x_0 è un punto di flesso, allora $f''(x_0) = 0$.

<u>dimostrazione</u>

Per definizione di punto di flesso, x_0 appartiene contemporaneamente ad un intervallo in cui la funzione è convessa (e dunque $f''(x_0) \geq 0$) e ad uno in cui la funzione è concava (e dunque $f''(x_0) \leq 0$); dunque, $f''(x_0) = 0$.

☑

<u>Osservazione</u>

L'asserto appena dimostrato non può essere invertito.

Ad esempio, la derivata seconda della funzione $f(x) = x^4$ si annulla per $x = 0$, che però non è un punto di flesso (la funzione è convessa in tutto il suo dominio).

Approssimazioni degli zeri di una funzione

Occupiamoci della ricerca degli zeri di una funzione, ovvero delle soluzioni di un’equazione $f(x) = 0$; a questo problema riconduciamo le equazioni apparentemente più generali della forma $f(x) = g(x)$, una volta che siano scritte come $f(x) - g(x) = 0$.

Tranne casi particolari, non esistono "formule risolutive", cioè non è possibile trovare esplicitamente le soluzioni per via algebrica: la risoluzione grafica dell’equazione consiste nel disegnare il grafico della funzione $f(x)$ e vedere se interseca l’asse delle x (oppure i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ e vedere se si intersecano tra di loro). Una volta provata l’esistenza di una soluzione, nasce l’esigenza di ricorrere a tecniche di calcolo numerico, che hanno lo scopo di approssimare tale soluzione.

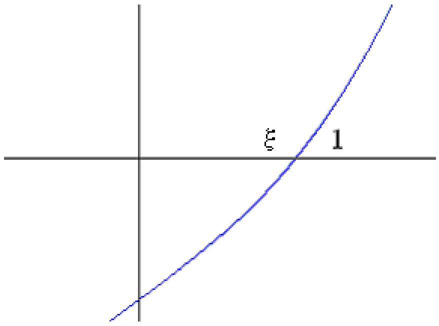
Nel caso di funzioni continue, possiamo utilizzare il teorema degli zeri

- con il metodo delle bisezioni successive
- con la variante delle approssimazioni decimali.

Esempio $\quad x^3 + 3x - 3 = 0$

Poiché $f(0) < 0 < f(1)$, esiste uno zero nell’intervallo $(0, 1)$.

Dato che $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, la funzione è crescente e quindi iniettiva; ne segue che la funzione ha un unico zero.



Applichiamo il metodo delle bisezioni successive nella variante decimale:

f (0,8) < 0 < f (0,9) 0,8 < ξ < 0,9

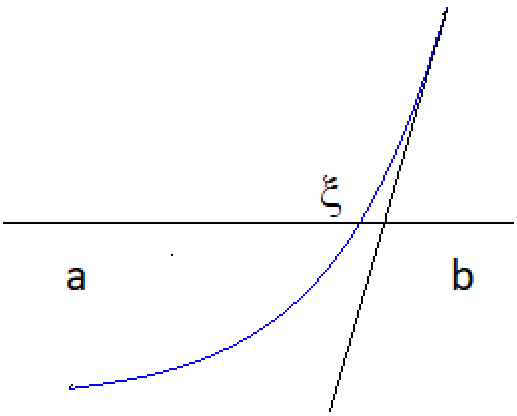
f (0,81) < 0 < f (0,82) 0,81 < ξ < 0,82

f (0,817) < 0 < f (0,818) 0,817 < ξ < 0,818

Quindi con tre cifre decimali esatte ξ ~ 0,817.

Il metodo che stiamo per esporre utilizza il fatto che nell'intervallo in cui abbiamo isolato lo zero la derivata prima e seconda della funzione hanno segno costante (nel caso dell'esempio f" (x) = 6 x > 0)

Alle ipotesi già fatte (f (a) < 0 < f (b) ; f ' > 0) aggiungiamo dunque l'ulteriore ipotesi che la funzione sia derivabile due volte in [a, b] e che risulti f "(x) > 0 (convessità della funzione).



La tangente alla curva nel punto di ascissa b ha equazione $y = f(b) + f'(b)(x - b)$ ed interseca l'asse x nel punto

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad , \quad \text{con } \xi < b_1 < b .$$

Iterando il procedimento a partire dal punto b_1, si determina il punto

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} \quad , \quad \text{con } \xi < b_2 < b_1 < b .$$

Si costruisce in questo modo una successione definita per ricorrenza da

$$b_0 = b$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)} .$$

Questa successione è decrescente ed i suoi termini si mantengono maggiori di ξ; sono dunque approssimazioni per eccesso di ξ e ad ogni passo l'approssimazione migliora.

In quanto decrescente e limitata inferiormente, la successione ammette limite finito; passando al limite nella relazione induttiva, si deduce che il limite è lo zero della funzione:

$$L = L - \frac{f(L)}{f'(L)} \quad \Leftrightarrow \quad f(L) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = \xi .$$

Per l'esempio precedente ($x^3 + 3x - 3 = 0$) la successione definita per ricorrenza è data da:

$$b_{n+1} = \frac{2\,b_n^{\,3} + 3}{3\,b_n^{\,2} + 3} \; .$$

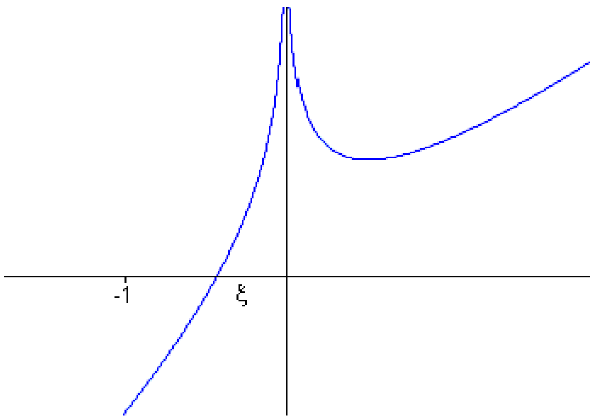
Se partiamo dall'intervallo [0, 1] e dal punto iniziale 1, troviamo successivamente:

0,83333333333 0,8178506375 0,8177316807.

Partendo dall'intervallo [0, 8 , 0, 9] e quindi dal punto iniziale 0,9, si trova:

0,8209944751 0,8177368881 0,8177316739.

Esempio #2 **2 x - log | x | = 0**



f (-0,5) < 0 < f (-0,4) -0,5 < ξ < -0,4

f (-0,43) < 0 < f (-0,42) -0,43 < ξ < -0,42

$f(-0{,}427) < 0 < f(-0{,}426)$ $\qquad -0{,}427 < \xi < -0{,}426$

Quindi con tre cifre decimali esatte $\alpha \sim -0{,}426$.

Applichiamo il metodo di Newton nell'intervallo $[-0{,}5\,,\ -0{,}4]$, in cui sono verificate le ipotesi fatte. La successione ricorsiva è data da:

$$b_{n+1} = \frac{b_n\,(1 - \log|b_n|)}{1 - 2b_n}\ .$$

Partendo dal valore iniziale $b_0 = -0{,}4$, si ottiene successivamente:

-0,4258423849 -0,4263026167 -0,4263027511.

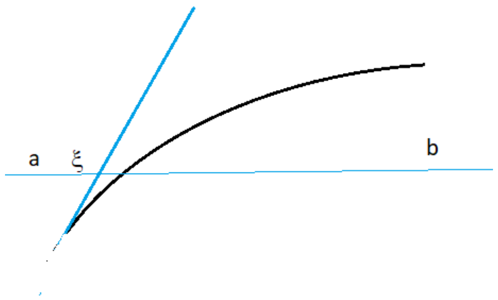
Varianti del metodo

$f' > 0$, $f'' < 0$ funzione crescente , concava

$f' < 0$, $f'' > 0$ funzione decrescente , convessa

$f' < 0$, $f'' < 0$ funzione decrescente , concava

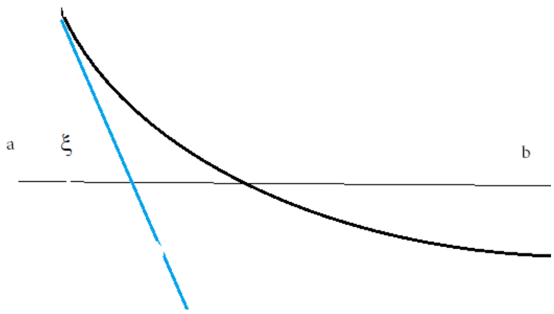
La successione che si deduce anche in questi casi ha il legame induttivo uguale a quella vista nel caso studiato. Quello che cambia o che potrebbe cambiare è il punto iniziale, che è <u>l'estremo in cui funzione e derivata seconda hanno lo stesso segno</u> (quindi, se la funzione è convessa si parte dall'estremo in cui la funzione ha valore positivo, se è concava dall'etremo in cui la funzione è negativa). Quando si parte dall'estremo a si trovano approssimazioni per difetto, dall'estremo b approssimazioni per eccesso.



$f' > 0$, $f'' < 0$

si parte da a

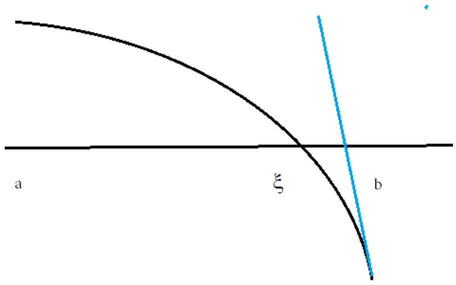
approssimazioni per difetto



$f' < 0$, $f'' > 0$

si parte da a

approssimazioni per difetto



$f' < 0$, $f'' < 0$

si parte da b

approssimazioni per eccesso

Esempio : $\cos x = x$ in $[0 , \pi/2]$

$f (x) = \cos x - x$

$f (\pi/2) < 0 < f (0)$

$f' < 0 \ , \ f'' < 0$

$b_1 = \pi/2 \quad ; \quad b_{n+1} = b_n + \dfrac{\cos b_n - b_n}{\operatorname{sen} b_n + 1}$

Primi valori trovati:

.7853981635 .7395361335 .7390851781 .7390851332 .7390851332