

10. Funzioni continue

Sia $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$.

Diciamo che f è **continua** in x_0 se:

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero, tenendo conto della definizione di limite, se

(**)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V(x_0):$$

$$\forall x \in A \cap V(x_0), \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

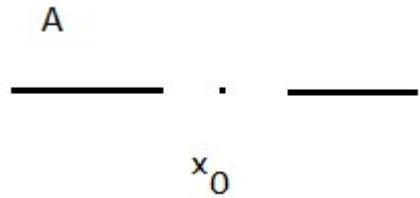
Nota: la condizione $x \neq x_0$ che compare nella definizione di limite qui può essere tolta, dato che la disequazione è sicuramente verificata anche per x_0 .

In sostanza, vogliamo che la funzione assuma valori $f(x)$ arbitrariamente vicini ad $f(x_0)$ per tutti i valori x del dominio che sono opportunamente vicini ad x_0 .

Osservazione

$$x_0 \in A \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 \text{ punto di accumulazione} \\ \text{oppure} \\ x_0 \text{ punto isolato} \end{array} \right.$$

perché in ogni intorno di x_0 cade almeno un altro punto di A (e allora x_0 è di accumulazione) oppure c'è un intorno di x_0 nessun altro punto di A (ed allora x_0 è isolato)



esempio di punto isolato

Ricordiamo che un punto x_0 è di accumulazione per A se

$$\forall U(x_0) \quad A \cap U(x_0) - \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Dunque il punto x_0 **non** è di accumulazione per A se

$$\exists U(x_0) \quad A \cap U(x_0) - \{x_0\} = \emptyset$$

e questo equivale a dire

$$\exists U(x_0) : A \cap U(x_0) = \{x_0\} \text{ oppure } A \cap U(x_0) = \emptyset$$

Dato che $x_0 \in A$, la prima possibilità è esclusa.

In conclusione, un punto $x_0 \in A$ **non** è di accumulazione per A se

$$\exists U(x_0) : A \cap U(x_0) = \{x_0\}$$

e questa è la definizione di punto isolato.

Se x_0 è isolato, la definizione di limite **non** si può dare. Il concetto di continuità però è sempre soddisfatto, perché in questo caso di punti del dominio vicini ad x_0 c'è solo x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V(x_0):$$

$$\forall x \in A \cap V(x_0), \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Qualunque sia ε , se prendiamo come intorno V di x_0 uno per cui $V \cap A = \{x_0\}$, la disequazione è sicuramente verificata.

Una volta stabilito che nei punti di A isolati la definizione di continuità è banalmente verificata, possiamo limitarci a considerare domini privi di punti isolati: è quello che faremo d'ora in poi.

La funzione si dice **continua in un insieme** $B \subset A$, se è continua in tutti i punti di B .

I punti in cui una funzione non è continua si dicono di **discontinuità**.

Le discontinuità di una funzione si presentano in varie forme:

- **discontinuità eliminabili**

quando esiste finito il limite della funzione, ma il valore della funzione non esiste oppure è diverso dal limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

$f(x_0)$ non esiste oppure è diverso da L

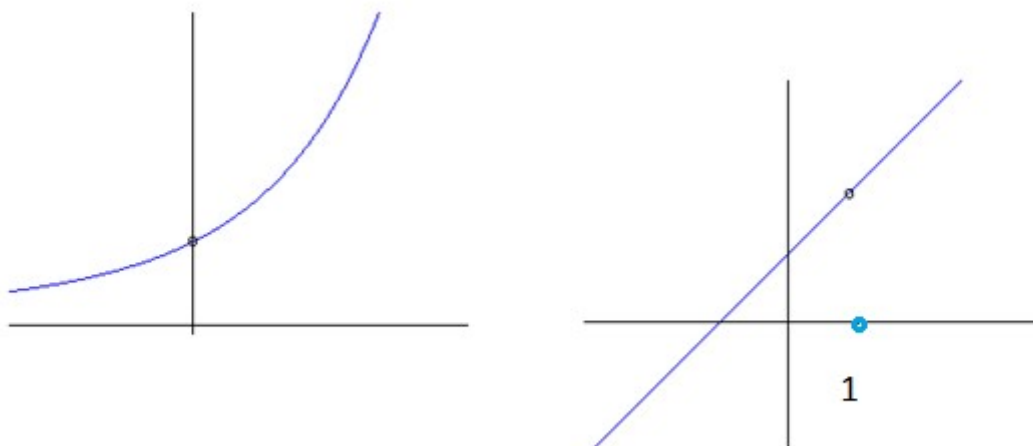
Esempi

$$(1) \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, \quad f(0) \text{ non esiste.}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2, \quad f(1) = 0 \neq 2.$$



Questo tipo di discontinuità può essere eliminata definendo opportunamente la funzione nel punto x_0 , mediante prolungamento (se la funzione in x_0 non è ancora definita) o cambio di valore (se la funzione in x_0 è già definita con un valore diverso dal limite).

In generale, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

si elimina la discontinuità nel punto ponendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A - \{x_0\} \\ L & \text{se } x = x_0 \end{cases}.$$

Così negli esempi precedenti si elimina la discontinuità considerando le funzioni

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} (e^x - 1)/x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases} = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- **discontinuità di I specie**

quando esistono finiti e tra loro diversi il limite destro e il limite sinistro della funzione

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \in \mathbb{R} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = M \in \mathbb{R}$$

$$L \neq M.$$

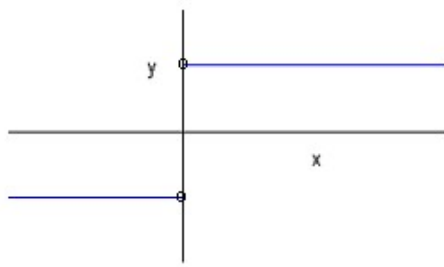
Esempi

$$(1) \quad f(x) = \operatorname{sgn} x = |x| / x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad , \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

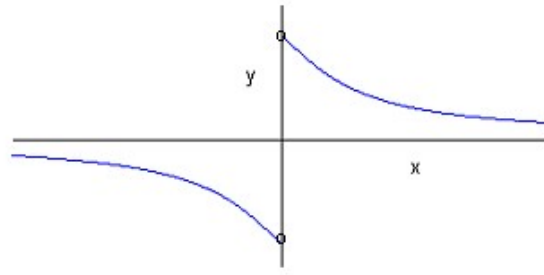
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

$$(2) \quad f(x) = \operatorname{arctg}(1/x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\pi/2 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \pi/2.$$



$$y = \operatorname{sgn} x$$



$$y = \operatorname{arctg}(1/x)$$

- discontinuità di II specie

quando il limite della funzione esiste infinito oppure quando esistono infiniti e diversi tra loro il limite destro e il limite sinistro oppure quando esistono diversi tra loro il limite destro e il limite sinistro e uno almeno di essi è infinito..

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \mp \infty$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ e uno almeno è infinito}$$

Esempi

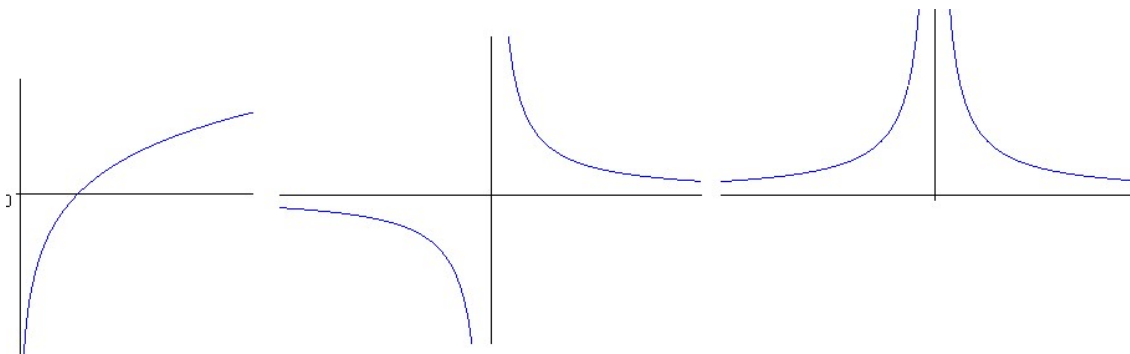
$$f(x) = \log x \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = 1/x \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm \infty$$

$$f(x) = 1 / |x| \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = +\infty$$

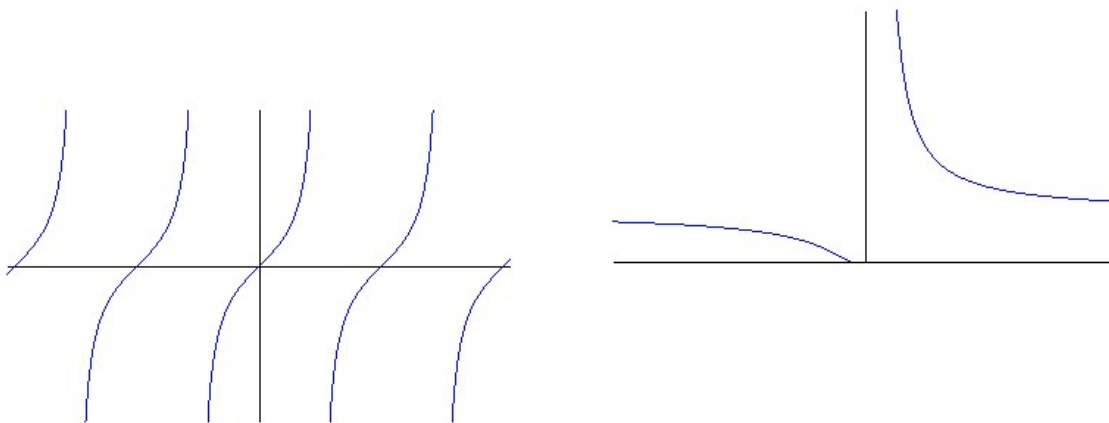
$$f(x) = \exp(1/x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$



$y = \log x$

$y = 1/x$

$y = 1 / |x|$



$y = \operatorname{tg} x$

$y = \exp(1/x)$

Osservazione

Nell'ultimo esempio il fatto che il limite da sinistra sia finito si interpreta dicendo che $x = 0$ è una discontinuità eliminabile solo da sinistra .

- discontinuità di III specie

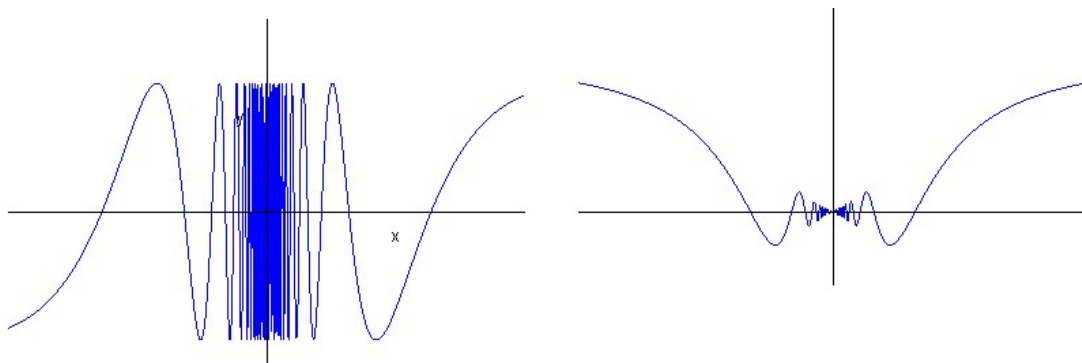
comprende tutti gli altri casi.

Un classico esempio è dato dalla funzione di Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

La funzione è discontinua in tutti i punti e la discontinuità è di III specie (non rientrando in nessuno dei casi visti precedentemente).

Un altro esempio è dato dalla funzione $f(x) = \sin(1/x)$ in $x_0 = 0$. Osserviamo invece che la funzione $f(x) = x \sin(1/x)$ ha in $x_0 = 0$ una discontinuità eliminabile. (I grafici di queste due funzioni sono riportati di seguito).



Teoremi sulle funzioni continue in un intervallo

- Teorema di Weierstrass o dell'esistenza del massimo e del minimo

Ogni funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, assume in tale intervallo massimo e minimo valore.

Facciamo vedere che la funzione assume valore massimo (in maniera analoga si prova l'esistenza del minimo) provando che il suo estremo superiore è un valore assunto dalla funzione.

(1) Usando le proprietà del sup (che al momento non sappiamo ancora se finito o no) si costruisce una successione $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) \rightarrow \sup f$.

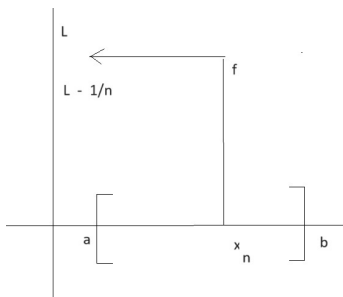
Infatti:

se $\sup f = L \in \mathbf{R}$, per definizione di estremo superiore si ha:

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{x} \in [a, b] : f(\bar{x}) > L - \varepsilon .$$

Scelto $\varepsilon = 1/n$ (con $n \in \mathbf{N}$), sia $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) > L - (1/n)$.



Poiché al variare di n risulta

$$L - (1/n) < f(x_n) \leq L,$$

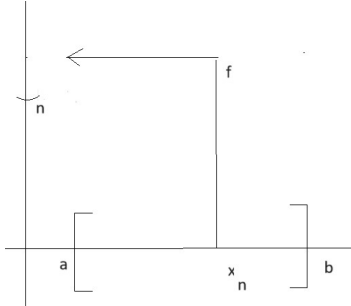
dal teorema del confronto si ottiene

$$f(x_n) \rightarrow L .$$

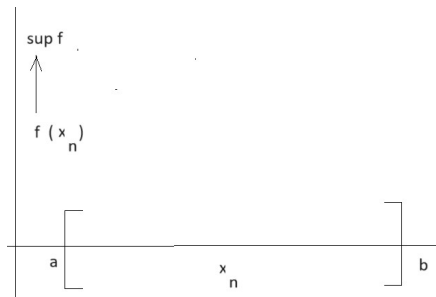
Se invece risulta $\sup f = +\infty$, per definizione si ha

$$\forall M > 0 \quad \exists \bar{x} \in [a, b] : f(\bar{x}) > M .$$

Posto $M = n \in \mathbf{N}$, sia $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) > n$.



Il teorema del confronto anche in questo caso fornisce $f(x_n) \rightarrow \sup f$.



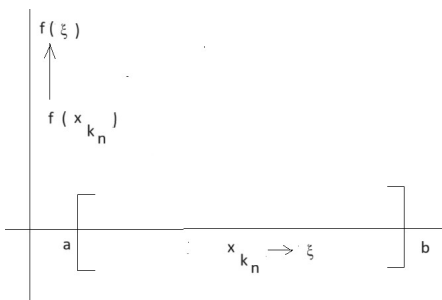
(2) Per il teorema di **Bolzano-Weierstrass** è possibile estrarre dalla successione x_n una sottosuccessione x_{k_n} convergente ad un punto dell'intervallo $[a, b]$:

$$x_{k_n} \rightarrow \xi \in [a, b]$$

(3)

Per la successione $f(x_{k_n})$ si ha:

$$f(x_{k_n}) \rightarrow f(\xi) \quad \text{perché } f \text{ è continua in tutti i punti dell'intervallo, in particolare nel punto } \xi$$



$$f(x_{k_n}) \rightarrow \sup f \quad \text{perché è estratta da } f(x_n)$$

Data l'unicità del limite si deduce $\sup f = f(\xi)$ e questo prova che il sup è anche massimo della funzione.



Osservazione

Il teorema fornisce una condizione sufficiente all'esistenza del massimo e del minimo, ma non necessaria, nel senso che esistono funzioni dotate di massimo e di minimo che non verificano qualcuna delle ipotesi. Ad esempio:

$$f(x) = \sin x, \quad 0 < x < 2\pi$$

La funzione è definita in un intervallo limitato ma non chiuso; ha massimo uguale a 1 (assunto in $\pi/2$), minimo uguale a -1 (assunto in $3\pi/2$)

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

La funzione è definita in un intervallo non limitato; ha massimo uguale a 1, minimo uguale a -1

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } 0 < x \leq 2\pi \\ 1/2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

La funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato, ma non è continua; ha massimo uguale a 1, minimo uguale a -1.

Tuttavia è anche vero che, togliendo una qualsiasi delle ipotesi del teorema, l'esistenza del massimo e del minimo non è più assicurata. Ad esempio:

$$f(x) = -\log x, \quad 0 < x \leq 1$$

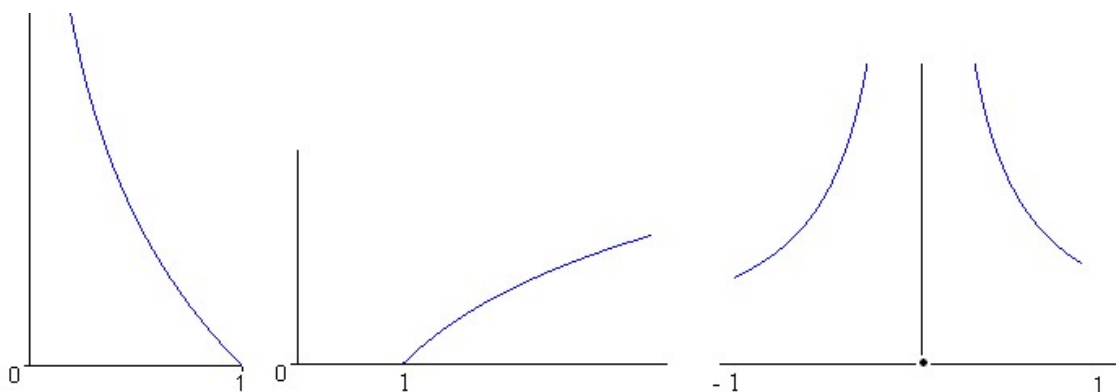
La funzione è definita in un intervallo che non è chiuso; non ha massimo.

$$f(x) = \log x, \quad x \geq 1$$

La funzione è definita in un intervallo non limitato; non ha massimo

$$f(x) = \begin{cases} 1/|x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

La funzione è definita in un intervallo chiuso e limitato, ma non è continua (in $x = 0$); non ha massimo.



Osservazione 2

Una funzione continua su tutto \mathbb{R} tale che per $x \rightarrow \pm\infty$ risulti $f(x) \rightarrow +\infty$ è dotata di minimo.

Una funzione continua su tutto \mathbb{R} tale che per $x \rightarrow \pm\infty$ risulti $f(x) \rightarrow -\infty$ è dotata di massimo

dimostrazione

Sia $f(x_0)$ un valore assunto dalla funzione. Per la definizione di limite esistono a e b con $a < x_0 < b$ tali che $f(x) > f(x_0) \quad \forall x < a$ e $\forall x > b$.

In $[a, b]$ la funzione assume valore minimo $f(\xi) \leq f(x_0)$ per il teorema di Weierstrass.

Questo valore è il minimo su tutto il dominio.

Risultati analoghi se f è continua in $[a, +\infty)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ oppure se f è continua in $(-\infty, a]$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Se invece i vari limiti considerati valgono $-\infty$, si ha l'esistenza del massimo.

- Teorema degli zeri

Per ogni funzione f continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e tale che risulti $f(a) f(b) < 0$ (cioè assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo), esiste almeno un punto $\xi \in (a, b)$ tale che $f(\xi) = 0$.

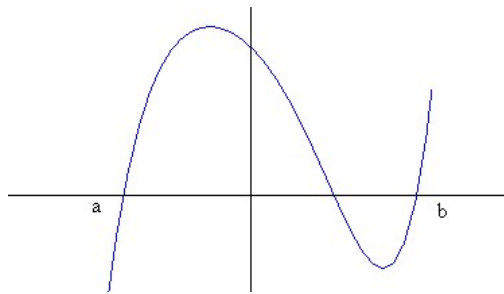
Dal punto di vista geometrico, se il grafico di una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$ ha estremi $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ situati uno al di sopra e l'altro al di sotto dell'asse delle x , allora il grafico deve intersecare l'asse in almeno un punto.

A differenza del teorema di Weierstrass adesso l'ipotesi che il dominio sia un intervallo è **necessaria**.

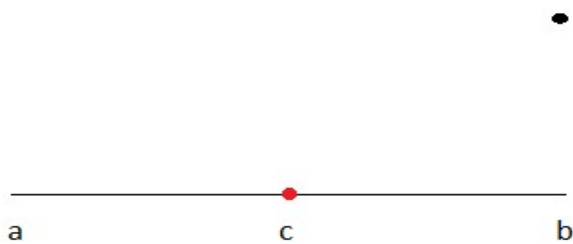
Ad esempio la funzione $f(x) = \operatorname{sgn} x$ definita in $[-1, 1] - \{0\}$ non si annulla in nessun punto del dominio, anche se $f(-1) = -1$ ed $f(1) = 1$.

dimostrazione con il metodo delle bisezioni successive

Supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$

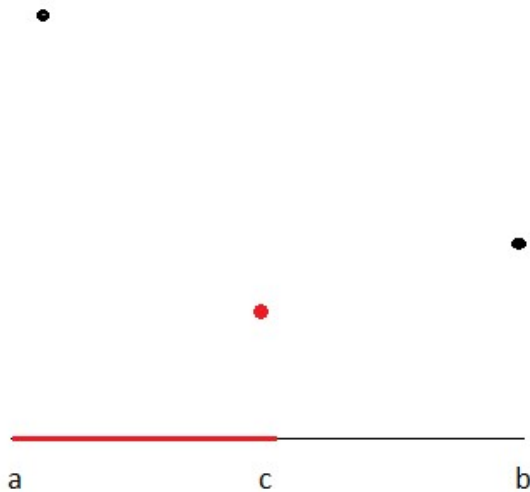


Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ nelle due parti $[a, c]$ e $[c, b]$, mediante il suo punto di mezzo $c = (a + b) / 2$. Se risulta $f(c) = 0$, si ha la tesi con $\xi = c$; altrimenti dei due intervalli prendiamo quello ai cui estremi la funzione assume valori di segno opposto e chiamiamolo $[a_1, b_1]$.



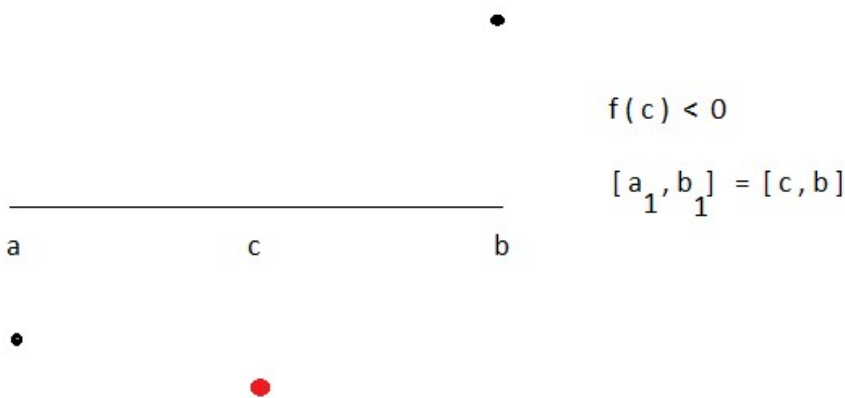
$$f(c) = 0$$

STOP



$$f(c) > 0$$

$$[a_1, b_1] = [a, c]$$



Se ripetiamo il procedimento, partendo dall'intervallo $[a_1, b_1]$, otteniamo un nuovo sottointervallo $[a_2, b_2]$.

In questo modo si costruisce una successione di intervalli $[a_n, b_n]$ i cui estremi sono tali che

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

$$b_n - a_n = (b - a) / 2^n$$

$$f(a_n) < 0 < f(b_n)$$

Le successioni degli estremi, in quanto monotone e limitate, ammettono limite finito : $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B$.

Poiché $b_n - a_n = (b - a) / 2^n$, passando al limite si deduce $B - A = 0$; cioè le due successioni tendono allo stesso limite $\xi \in [a, b]$ e dunque, per la continuità della funzione:

$$f(a_n) \rightarrow f(\xi), f(b_n) \rightarrow f(\xi).$$

Per il teorema del passaggio al limite, deve essere :

$$f(\xi) \leq 0 \text{ perché } f(a_n) < 0$$

$$f(\xi) \geq 0 \text{ perché } f(b_n) > 0$$

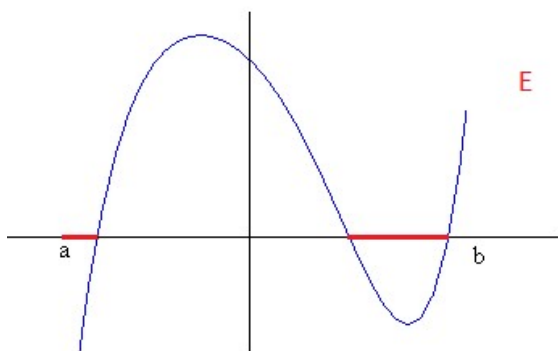
e dunque necessariamente $f(\xi) = 0$.

dimostrazione alternativa (usa le proprietà dell'estremo superiore)

Anche in questo caso supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$.

Poniamo:

$$E = \{ x \in [a, b] : f(x) < 0 \}.$$

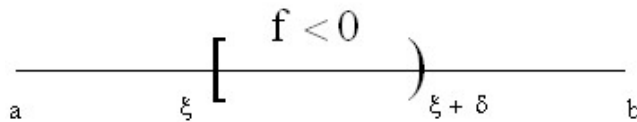


L'insieme E:

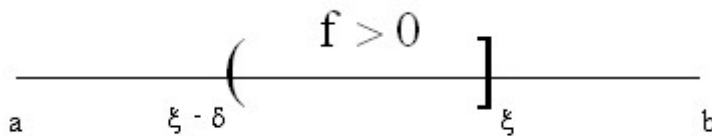
- non è vuoto (infatti $a \in E$, dato che $f(a) < 0$)
- è limitato superiormente (dato che $E \subset [a, b]$).

Esiste quindi un numero reale $\xi \in [a, b]$ tale che $\xi = \sup E$: vogliamo provare che $f(\xi) = 0$. Ragioniamo per assurdo.

Se fosse $f(\xi) < 0$ (e dunque $\xi \neq b$), per il teorema della permanenza del segno esisterebbe un intorno di ξ (in particolare un intorno destro) in cui la funzione avrebbe segno negativo. Ma allora i punti di questo intorno apparterrebbero ad E, il che è assurdo dato che sono più grandi di $\sup E$.



Se invece fosse $f(\xi) > 0$ (e dunque $\xi \neq a$), ancora per il teorema della permanenza del segno esisterebbe un intorno (in particolare un intorno sinistro) in cui la funzione avrebbe segno positivo. Ma allora nessun punto di questo intorno apparterebbe ad E ; questo è assurdo perché (per la caratterizzazione di $\sup E$) in ogni intorno sinistro $(\xi - \delta, \xi]$ deve cadere almeno un punto di E .



In conclusione, poiché $f(\xi)$ non può essere né positivo né negativo, necessariamente risulta $f(\xi) = 0$.

Teorema dei valori intermedi

Sia f una funzione continua in un intervallo .

Se assume due valori distinti $l < L$, allora assume anche tutti i valori intermedi.

In particolare, l'immagine della funzione è un intervallo.

Osservazione

Anche in questo caso , è necessario che la funzione sia definita in un intervallo.

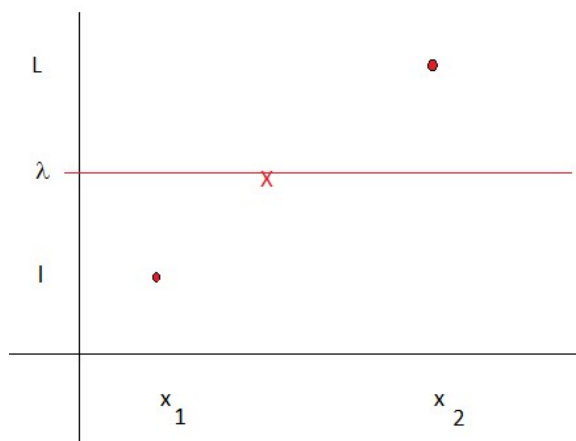
Es. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$.

Osservazione

Il teorema degli zeri è un caso particolare del teorema dei valori intermedi: poiché la funzione assume agli estremi dell'intervallo $[a, b]$ valori di segno opposto, 0 è un valore intermedio e in quanto tale è assunto dalla funzione.

Come vedremo, ci serviremo del caso particolare (teorema degli zeri) per dimostrare il caso generale (teorema dei valori intermedi), secondo un procedimento comune in matematica.

dimostrazione



Applichiamo il teorema degli zeri alla funzione $F (x) = f (x) - \lambda$ nell'intervallo $[x_1 , x_2]$ (vedere figura).

Altre formulazioni del teorema dei valori intermedi

Ogni funzione continua in un intervallo I assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il suo estremo inferiore ed il suo estremo superiore; l'immagine $f (I)$ della funzione è dunque un intervallo (ridotto ad un solo punto, se la funzione è costante).

dimostrazione

Sia k un qualunque numero compreso tra $\inf f$ e $\sup f$ (che possono anche essere infiniti ; in tal caso k è un numero qualunque). Dalla definizione di estremo inferiore ed estremo superiore segue che esistono in I due punti x_1 e x_2 tali che:

$$\inf f \leq f(x_1) < k < f(x_2) \leq \sup f.$$

A questo punto ripetiamo la dimostrazione precedente nell'intervallo $[x_1, x_2]$

Ogni funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ assume almeno una volta tutti i valori compresi tra il suo minimo m e il suo massimo M .

dimostrazione

Se $m = M$, la funzione è costante e l'asserto è ovvio.

Supponiamo dunque $m \neq M$ e sia $\lambda \in (m, M)$: dobbiamo provare che esiste $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) = \lambda$.

Siano x_m e x_M rispettivamente punto di minimo e punto di massimo: per fissare le idee, supponiamo $x_m < x_M$. A questo punto ripetiamo la dimostrazione già vista, applicandola all'intervallo $[x_m, x_M]$.



Esercizio

Come applicazione del teorema degli zeri consideriamo le seguenti equazioni:

$$x^3 + 3x - 3 = 0$$

$$2x - \log |x| = 0;$$

per la prima esiste un metodo di risoluzione in campo complesso, mentre la seconda non può essere studiata per via algebrica.

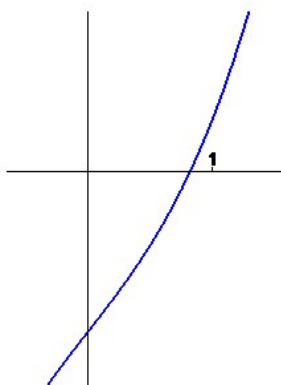
Posto $f(x) = x^3 + 3x - 3$, si ha $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$; il teorema dei valori intermedi prova che in particolare la funzione assume il valore 0 e quindi che l'equazione ha almeno una soluzione. Osservato poi che $f(0) < 0 < f(1)$, possiamo precisare che nell'intervallo $(0, 1)$ l'equazione ha una soluzione α .

Con una variante rispetto alle bisezioni successive, calcoliamo la funzione sui punti 0,1 0,2 0,3 ...; poiché risulta $f(0,8) < 0 < f(0,9)$, troviamo che con una cifra decimale esatta è $\alpha = 0,8$.

Se vogliamo migliorare il risultato, possiamo calcolare la funzione sui punti della forma $x = 0,81$ 0,82 ...; essendo $f(0,81) < 0 < f(0,82)$, con due cifre decimali esatte risulta $\alpha = 0,81$.

Anticipazione di risultati che vedremo più avanti:

$f'(x) = 3x^2 + 3$ (derivata). Se una funzione ha derivata positiva in un intervallo (come nel caso che stiamo esaminando), in questo intervallo la funzione è crescente e quindi iniettiva. In particolare, non può assumere il valore 0 più di una volta e quindi l'equazione data non può avere più di una soluzione.



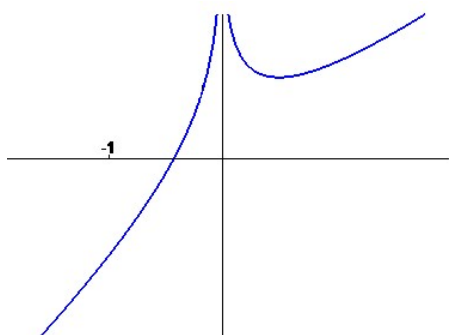
Per quanto riguarda la seconda equazione, poniamo $f(x) = 2x - \log |x|$.

Poiché $f(-1) = -2$ e per $x \rightarrow 0$ $f(x) \rightarrow +\infty$, l'equazione deve avere almeno una soluzione α compresa nell'intervallo $(-1, 0)$.

Calcolando la funzione nei punti $x = -0.9 -0.8 \dots$, si trova $f(-0,5) < 0 < f(-0,4)$ e dunque con una cifra decimale esatta è $\alpha = -0,4$.

Poiché risulta $f(-0,43) < 0 < f(-0,42)$, troviamo $\alpha = -0,42$ con due cifre decimali esatte.

Sapendo che $f'(x) = 2 - 1/x$, si trova che la funzione è crescente negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(1/2, +\infty)$, decrescente nell'intervallo $(0, 1/2)$.



Dal grafico della funzione possiamo dedurre che l'equazione data ha un'unica soluzione.

Monotonia delle funzioni continue invertibili

Ogni funzione f continua in un intervallo ed iniettiva è monotona (cioè, strettamente crescente o decrescente).

Osservazione

Le funzioni monotone sono iniettive, ma non vale il viceversa: le funzioni iniettive non sono necessariamente monotone: ad esempio $1/x$ nel suo dominio); le ipotesi che abbiamo aggiunto (cioè che la funzione sia **definita in un intervallo** e sia **continua**) sono sufficienti a garantire l'affermazione inversa.

dimostrazione

Ragioniamo per assurdo: se f non fosse monotona, esisterebbero tre punti

$$x_1 < x_2 < x_3$$

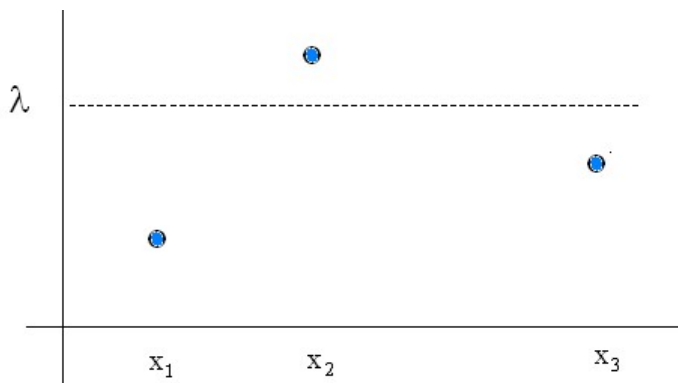
tali che

$$f(x_1) < f(x_2) \quad , \quad f(x_2) > f(x_3)$$

oppure

$$f(x_1) > f(x_2) \quad , \quad f(x_2) < f(x_3).$$

Supponiamo, per fissare le idee, di essere nel primo caso.



Se λ è tale che:

$$\lambda < f(x_2) \quad , \quad \lambda > f(x_1) \quad , \quad \lambda > f(x_3) \quad ,$$

per il teorema dei valori intermedi applicato prima all'intervallo $[x_1, x_2]$, poi all'intervallo $[x_2, x_3]$, esistono due punti distinti

$$\xi_1 \in (x_1, x_2) \quad , \quad \xi_2 \in (x_2, x_3)$$

tali che

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = \lambda \quad ,$$

il che contraddice l'ipotesi di iniettività.



- **Continuità della funzione inversa**

Per ogni funzione f continua e iniettiva in un intervallo I , la funzione inversa è continua nell'intervallo $f(I)$.

Osservazione 1

Che $f(I)$ sia un intervallo è già stato provato con il teorema dei valori intermedi.

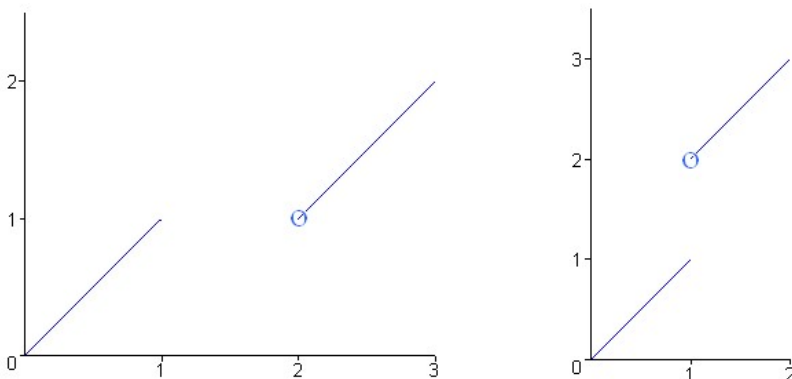
Osservazione 2

Per funzioni continue in insiemi che non sono intervalli, la funzione inversa non è necessariamente continua.

Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{se } x \in (2, 3] \end{cases}$$

è continua in tutti i punti del suo dominio, che non è un intervallo.



La sua inversa

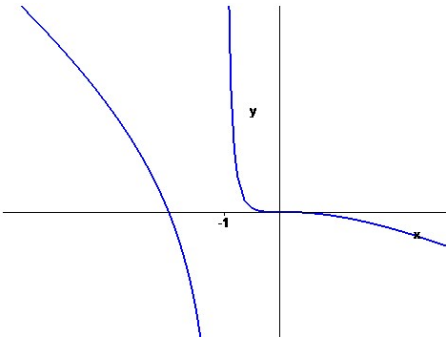
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x + 1 & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$$

non è continua in $x = 1$.

Altri esercizi

1. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = 2 \log|x+1| - \frac{2x+x^2}{1+x}$ sapendo

che è $f'(x) = -\frac{x^2}{(1+x)^2}$.



2. Trovare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni e classificarli:

$$(x+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x^2}, \quad \frac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x}, \quad x^{-\frac{2|x-1|}{x \log x^2}}$$

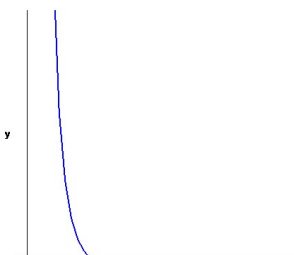
(i) 1 disc. I specie, -1 disc. eliminabile

(ii) 0 disc. eliminabile, ± 1 disc. II specie

(iii) 0, 1 disc. eliminabili

3. Studiare al variare del parametro k l'equazione $kx^2 + \log x = 0$.

Sugg.: l'equazione può essere riscritta in modo equivalente nella forma $-\log x / x^2 = k$. Il problema equivale a trovare l'immagine della funzione $f(x) = -\log x / x^2$. Disegnare il grafico della funzione, sapendo che la derivata vale $(2 \log x - 1) / x^3$.



Punto di minimo $x = \sqrt{e}$, minimo $-1 / (2 e)$

$k \geq 0$ 1 soluzione

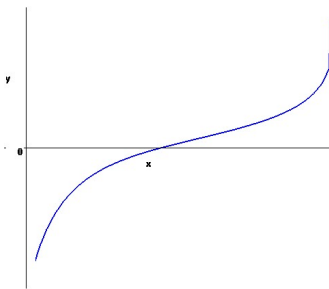
$-1 / (2 e) < k < 0$ 2 soluzioni

$k = - 1 / (2/e)$ 1 soluzione

$k < - 1 / (2 e)$ nessuna soluzione

4. Disegnare il grafico della funzione $f (x) = \log \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x$.

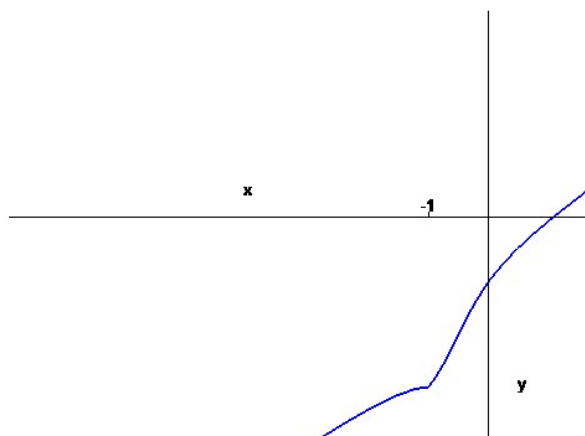
Provare che – tenendo conto di periodicità e simmetrie – basterà studiarla nell'intervallo $[0 , \pi/2]$; in questo intervallo $f' (x) = - 2 \operatorname{tg}^3 x$.



5. Disegnare il grafico della funzione $f (x) = x - \arccos \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$ sapendo

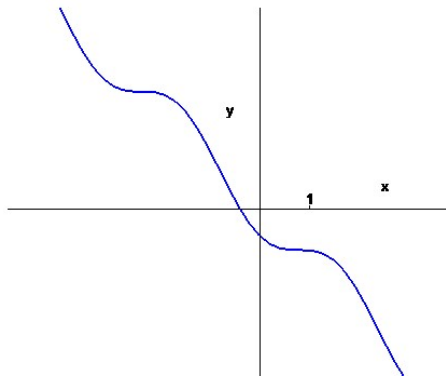
che $f' (x) = 1 + \frac{\operatorname{sgn} (x + 1)}{(2x^2 + 2x + 1)^{1/2}}$.

Oss. $\operatorname{sgn} (x + 1) = \begin{cases} 1 & \text{se } x + 1 > 0, \text{ cioè se } x > -1 \\ -1 & \text{se } x + 1 < 0, \text{ cioè se } x < -1 \end{cases}$



6. Trovare il numero di soluzioni dell'equazione $\sin^2 x - x = \pi/6$.

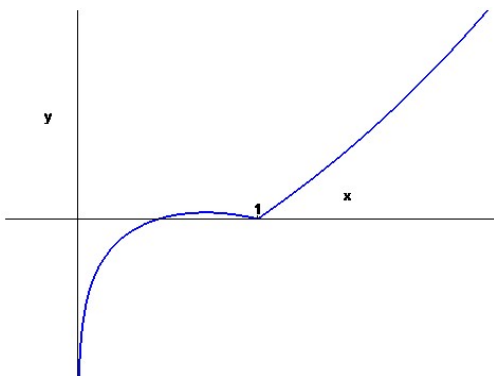
Sugg.: studiare la funzione $f(x) = \sin^2 x - x - \pi/6$, sapendo che $f'(x) = \sin 2x - 1$.



In questo caso non serve disegnare il grafico della funzione : basta osservare che per $x \rightarrow \pm\infty, f(x) \rightarrow \mp\infty$ e quindi almeno una volta si annulla. Il fatto che si annulli solo una volta si deduce dal fatto che la derivata è negativa e quindi la funzione è decrescente (e quindi iniettiva) Osservazione: il fatto che la derivata si annulli in infiniti punti non cambia le conclusioni . Nel grafico della funzione a questi punti corrispondono punti a tangente orizzontale.

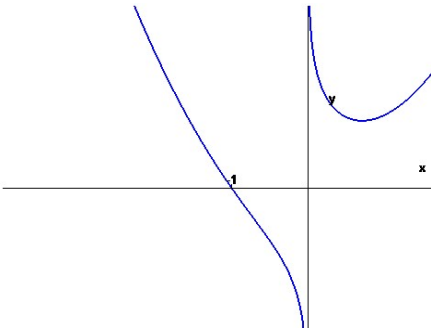
7. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \log x + |x^2 - 1|$ sapendo che $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$.

$$\text{Oss. } \operatorname{sgn}(x^2 - 1) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 - 1 > 0 \\ -1 & \text{se } x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$



8. *

(i) Disegnare il grafico della funzione $g(x) = x^2 + (\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|)$, sapendo che $g'(x) = 2x - \frac{\operatorname{sgn} x}{x}$. Dal grafico dedurre il segno di $g(x)$.



(ii) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x + \frac{\log|x|}{|x|}$, sapendo che $f'(x) = \frac{x^2 + (\operatorname{sgn} x)(1 - \log|x|)}{x^2}$. Osservare che il segno di $f'(x)$ è lo stesso di $g(x)$.

* Commento: $f(x)$ è un esempio di funzione in cui il segno della derivata non si può studiare per via algebrica, ma solo per via grafica. Questo implica dunque lo studio successivo di due funzioni.

