Sistemi lineari

Generalità sui sistemi

Sistema lineare di m equazioni in n incognite : definizione.

Coefficienti , termini noti.

Soluzioni.

Sistemi impossibili, determinati, indeterminati :

- $x + y = 1 \quad , \quad 2x + 2y = 0$ impossibile
- $x + y + z = 1 \quad , \quad y + z = 1 \quad , \quad z = 0$ determinato
- $x + y + z = 1 \quad , \quad x + y = 0$ indeterminato
- $x + y - z = 1$ indertermina

Rappresentazione matriciale di un sistema

$$\left.\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right.$$

Matrice dei coefficienti : righe e colonne

Matrice completa

Colonna dei termini noti

Operazioni elementari che trasformano un sistema in uno equivalente (cioè con le stesse soluzioni) :

- scambiare tra di loro due equazioni
- moltiplicare un’equazione per una costante non nulla
- sommare ad una equazione altre equazioni del sistema ciscuna moltiplicata per una costante

esempio :

riduzione a forma canonica del sistema

$2x + y - z = 4$, $x + 5y + 2z = 4$, $x - y = 0$.

In forma matriciale:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

Vogliamo procedere in modo che la matrice dei coefficienti diventi la matrice identica di ordine 3 , cioè la matrice

$$\begin{array}{ccc|} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Facciamo uno scambio di righe, in modo che il termine a_{11} sia 1 ; questo non è necessario, ma semplifica i calcoli:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}$$

Moltiplichiamo la prima riga per -1 e sommiamola alla seconda; poi moltiplichiamo ancora la prima riga per -1 e sommiamola alla terza.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & -9 & -5 & -4 \end{array}$$

Il nuovo termine a_{22} deve diventare 1 : dividiamo la seconda riga per -6.

Ciò fatto, moltiplichiamo la nuova seconda riga per -5 e sommiamola alla prima; poi moltiplichiamo la nuova seconda riga per 9 e sommiamola alla terza.

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right.$$

Infine , il termine a_{33} deve diventare 1 : dividiamo la terza riga per -2.

Ciò fatto, moltiplichiamo la nuova terza riga per -1/3 e sommiamola sia alla prima che alla seconda riga:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right.$$

Il sistema a cui arriviamo è equivalente a quello dato; ma scritto in questo forma possiamo leggere le soluzioni direttamente nella colonna dei termini noti: x = 1 , y = 1 , z = -1.

Operazioni di cardine

Nell'esempio precedente le operazioni elementari sono state fatte in sequenze di 3 alla volta (perché 3 era il numero delle equazione, ovvero delle righe della matrice) : ciascuna di queste sequenze di operazioni riga ha avuto come risultato quello di far comparire nella tabella una colonna tutta nulla eccetto un termine uguale ad 1 che di volta in volta appare in una riga diversa . Se questo coefficiente è nella riga r e nella colonna s , diciamo che nell'equazione r è stata esplicitata la variabile x_s.

Altro esempio (stavolta la matrice dei coefficienti non è quadrata).

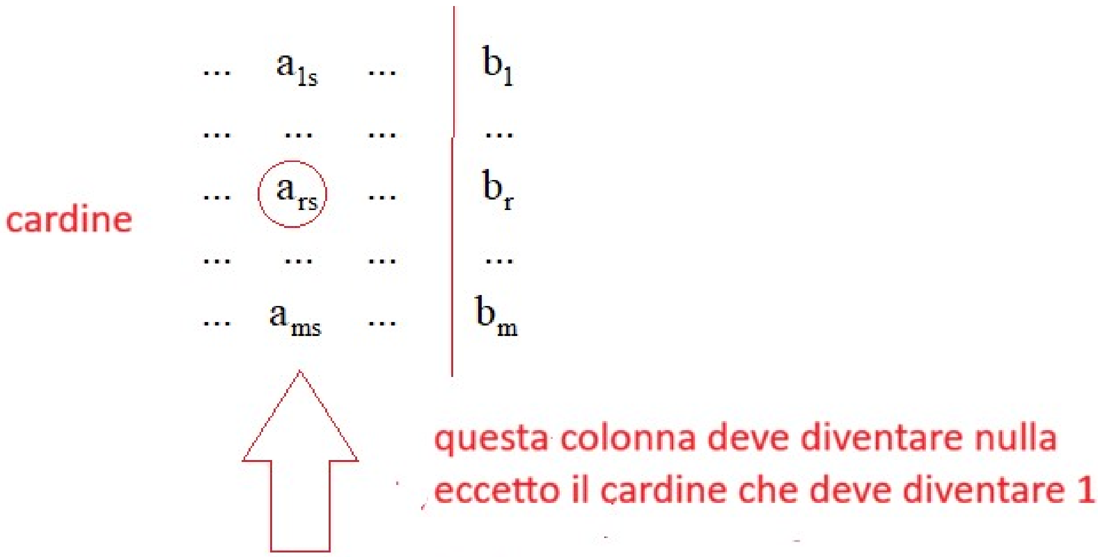
Procedendo come prima, si trova :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \quad \text{diventa} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3/7 \end{array}$$

Dato che nella matrice ci sono soltanto 3 righe , ci fermiamo qui : non è possibile ottenere una nuova colonna in cui il t\ermine che vale 1 stia in una riga diversa da quelle già utilizzate.

In sintesi , in una operazione di cardine

(1) si sceglie un termine $a_{rs} \neq 0$ su cui fare cardine



(2) si divide la riga r-esima per a_{rs}

(3) ad ogni altra riga si somma la riga r-esima moltiplicata per un'opportuna costante , in modo da far comparire di volta in volta 0 negli altri termini della colonna considerata.

In questo caso si dice che nell'equazione r è stata esplicitata la variabile x_s .