Percorso di Eccellenza - Esempio di prova d'esame

1. Si consideri la serie di potenze definita da $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{n!}$. Si trovi il raggio di convergenza R della serie e si trovi l'espressione di f all'interno del disco di convergenza.

2. Si calcoli la serie di Fourier della seguente funzione periodica di periodo 2π

$$f(t) = \pi - |x| \qquad \text{se } 0 \leq 2\pi$$

(ed estesa per periodicità a tutto $\mathbf{R}$). Si consiglia di farsi un grafico della f. Si dica se la serie di Fourier converge uniformemente a f.

3. Usando i metodi visti a lezione si studi l'equazione delle corde vibranti con termine noto g, dove g è una costante (per esempio la forza di gravità).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) + g & \text{per ogni } (t,x) \text{ con } 0 \leq x \leq L, t \in \mathbf{R} \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & \text{per ogni } t \in \mathbf{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{per ogni } x \in [0,L] \\ \frac{\partial}{\partial t} u(0,x) = v_0(x) & \text{per ogni } x \in [0,L] \end{cases} \tag{1}$$

Si scriva per esempio la soluzione in termini di una serie di Fourier rispetto alla variabile spaziale.

Si trovi anche, se c'è, l'espressione della posizione iniziale u_0 tale che la relativa soluzione, abbinata alla condizione $v_0 = 0$, rimane costante nel tempo (posizione a riposo della corda). Suggerimento: Che equazione risolve u_0?