

## **INSIEMI E NUMERI**

Nozione di insieme e terminologia collegata (appartenenza, inclusione, unione, intersezione e complementare). Leggi di De Morgan.

Formalizzazione del linguaggio: proposizioni e predicati (=proposizioni dipendenti da variabili). Connettivi logici e negazione. Quantificatori (per ogni/esiste) e loro funzionamento.

Numeri interi. Principio di induzione. Formula del binomio di Newton. Formula sulla differenza di due potenze.

Numeri Interi relativi, numeri razionali e numeri reali.

Definizione di estremo superiore e inferiore .Assioma di Dedekind.

Definizione di estremo superiore/inferiore infiniti.

Caratterizzazioni degli estremi inf. e sup. Massimo e minimo di un insieme e caratterizzazione della loro esistenza.

Nozione di funzione e nozioni collegate (punto, valore, dominio, immagine, iniettività, surgettività , bigettività, funzione composta e funzione inversa, grafico).

Definizione di massimo/minimo/estremo superiore/estremo inferiore di funzioni a valori reali.

Conoscenza delle proprietà delle funzioni elementari (polinomi, funzioni razionali, esponenziali, logaritmi e funzioni trigonometriche). Funzione "valore assoluto" e sue proprietà.

## **LIMITI E CONTINUITA'**

Nozione di successione. Limite di successioni. Classificazione del comportamento al limite (succ. convergenti/divergenti/irregolari).

Proprietà dei limiti di successioni: limiti e ordine (unicità del limite, permanenza del segno(DIM), monotonia, confronto, l'esistenza del limite implica la limitatezza (DIM) ), limite e operazioni nel caso di limiti finiti (limite della somma (DIM), del prodotto e del quoziente, prodotto di un infinitesimo per un limitato);

Esistenza del limite per successioni monotone e sua caratterizzazione (DIM+).

Introduzione della costante e di Neper (DIM-).

Operazioni con i limiti infiniti. Forme indeterminate. Limiti per eccesso e per difetto.

Limiti notevoli (DIM-). Teorema di Cesaro (con la radice n-esima) (DIM).

Sottosuccessioni. Limite delle sottosuccessioni (DIM del teorema «di composizione»).

Successioni asintotiche, ordine di infinitesimo, principio di sostituzione degli infinitesimi (DIM), o piccoli o grandi e loro proprietà (DIM-).

Nozione di punto di accumulazione tramite le successioni. Definizione di limite di funzioni tramite le successioni. Definizione di punto di accumulazione destro/sinistro e di limite destro/sinistro; definizione di limite per eccesso/difetto;

legame tra queste nozioni di limite.

Proprietà dei limiti di funzione:unicità del limite, permanenza del segno,monotonia del limite, teorema di confronto (due carabinieri) , somme prodotti e quozienti di limiti finiti,operazioni con i limiti infiniti e forme indeterminate.

Teorema sul limite della composizione (o cambio di variabile nei limiti).

Esistenza dei limiti destro e sinistro per funzioni monotone e loro caratterizzazioni mediante inf e sup. (DIM).

O piccoli e o grandi in un punto e principio di sostituzione degli infinitesimi per funzioni. Limiti di funzione notevoli (DIM-).

Definizione di funzione continua. Classificazione dei tipi di discontinuità.

Algebra delle funzioni continue (somme prodotti e quozienti).

Continuità della composizione tra funzioni continue.

Teorema degli zeri (DIM+).

Teorema di Weierstrass (DIM+).

Teorema dei valori intermedi (DIM+). Una funzione continua trasforma intervalli in intervalli.

Caratterizzazione della continuità per una funzione monotona (DIM)

Continuità dell'inversa di una funzione continua su un intervallo. (DIM).

Continuità delle funzioni elementari.

## **DERIVAZIONE**

Definizione di derivata. Derivabilità implica continuità (DIM). Retta tangente al grafico.

Derivate successive alla prima.

Regole di calcolo delle derivate (somma, prodotto, quoziente, composizione, inversa) (DIM della regola del prodotto e della composizione) .

Derivate delle funzioni elementari (DIM-).

Teorema di Fermat (sui massimi o minimi relativi)(DIM+)

Teorema di Lagrange (DIM+) e sue conseguenze: Rolle (DIM) e Cauchy (DIM).

Relazione tra segno della derivata e monotonia (DIM+).

Se  $f$  è derivabile su un intervallo,  $f$  è costante se e solo se  $f'$  è identicamente nulla (DIM)

Teoremi di de l'Hospital (DIM+ del caso  $0/0$ ).

Polinomio di Taylor e sua caratterizzazione (DIM). Formula di Taylor con resto di Peano (DIM+) e con resto di Lagrange (DIM).

Sviluppi di Taylor di  $\exp(x)$  ,  $\log(1+x)$  ,  $\sin(x)$  ,  $\cos(x)$  ,  $(1+x)^a$  .

Uso della formula di Taylor nel calcolo degli o piccoli e nei limiti di forme indeterminate.

Studi di funzione.

Convessità: definizione, caratterizzazione mediante la monotonia dei rapporti incrementali (DIM). Funzioni convesse derivabili e caratterizzazione della convessità

mediante la posizione della retta tangente al grafico (DIM). Funzioni convesse derivabili due volte e caratterizzazione della convessità mediante il segno della derivata seconda.

## **SERIE**

Definizione delle somme parziali di una successione; nozione di convergenza /divergenza/ irregolarità di una serie e di (eventuale) somma di una serie.

Se una serie converge il suo termine generale tende a zero (DIM).

Serie geometrica e sua convergenza a seconda della ragione (DIM).

Serie telescopiche. Serie armonica generalizzata e suo carattere (DIM-).

Serie a termini positivi; una serie a termini positivi non può essere irregolare (DIM+); criterio del confronto e del confronto asintotico (DIM); criterio della radice (DIM) e criterio del rapporto.

Definizione di convergenza assoluta di una serie; criterio della convergenza assoluta (DIM+).

Serie a segni alterni e criterio di Leibniz (DIM).

Proprietà commutativa e associativa delle serie.

Prodotto alla Cauchy di due serie (DIM nel caso dei termini positivi).

Serie di potenze e loro proprietà; raggio di convergenza, derivazione per serie.

Alcune serie di potenze notevoli (usando la formula di Taylor).

Serie di Fourier e loro proprietà; teorema di convergenza, relazioni tra sommabilità dei coefficienti della serie di Fourier e la regolarità della funzione.

## **INTEGRAZIONE**

Somme di Riemann, somme inferiori e superiori; definizione di integrale di Riemann; caratterizzazione dell'integrabilità mediante le somme inf/sup (DIM.).

Proprietà dell'integrale; linearità, additività rispetto all'intervallo, monotonia, integrabilità del prodotto, integrabilità della composizione con una funzione lipschitziana; integrale del modulo e modulo dell'integrale.

Classi di funzioni integrabili: integrabilità delle funzioni monotone (DIM+); integrabilità delle funzioni continue (DIM nel caso lipschitziano); esempio di funzione non integrabile.

Teorema della media integrale (DIM).

Antiderivata: definizione di primitiva e struttura dell'insieme delle primitive.

Teorema fondamentale del calcolo integrale I (DIM+).

Primitive delle funzioni elementari.

Funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale II (di Torricelli) (DIM+).

Integrazione per sostituzione (DIM-) e per parti (DIM-).

Integrale improprio su un intervallo illimitato o per una funzione illimitata vicino a

un punto (o combinazione tra le due situazioni); classificazione del carattere di un integrale improprio; integrale di funzioni positive; criterio del confronto e del confronto asintotico per gli integrali impropri;; integrabilità assoluta e integrabilità.  
Carattere dell'integrale di  $1/x^a$  al variare di  $a$ , sia al finito che all'infinito (DIM-)  
Integrali e serie; un criterio di convergenza per le serie tramite l'integrale improprio (DIM); un altro modo per discutere la serie armonica (DIM-).

## **EQUAZIONI DIFFERENZIALI**

Equazioni lineari del primo ordine. Formula risolutiva (DIM-). Studio qualitativo della famiglia delle soluzioni.

Equazioni alle derivate parziali. Formula risolutiva (DIM-). Studio qualitativo della famiglia delle soluzioni.

Teorema di esistenza e unicità di Cauchy per le equazioni (e più in generale per i sistemi) del primo ordine.

Proprietà delle soluzioni per i sistemi lineari del primo ordine con  $N$  equazioni: caratterizzazione delle soluzioni del sistema omogeneo (formano uno spazio lineare di dimensione  $N - DIM$ ); caratterizzazione delle soluzioni del sistema non omogeneo (formano uno spazio affine di dim  $N - DIM$ ). Proprietà delle soluzioni dell'equazione lineare di ordine  $N$ .

Studio dell'equazione lineare a coefficienti costanti di ordine due: polinomio caratteristico, soluzioni dell'omogenea, soluzioni dell'equazione generale per particolari termini noti.

Legenda:

DIM+ → « da sapere assolutamente »

DIM → « da sapere per arrivare a un risultato decente »

DIM- → « da sapere per arrivare al massimo risultato »

Testi da cui reperire il materiale indicato sopra:

- 1) Libro di testo: Analisi Matematica 1, M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Zanichelli.
- 2) Lucidi delle lezioni svolte – in rete.
- 3) Nota integrativa sulle serie – in rete.
- 4) Nota integrativa sulle equazioni differenziali – in rete.

Il materiale relativo ai punti 2), 3) e 4) si trova all'indirizzo:  
<http://www2.ing.unipi.it/~d6081/DIDA/index.html>

