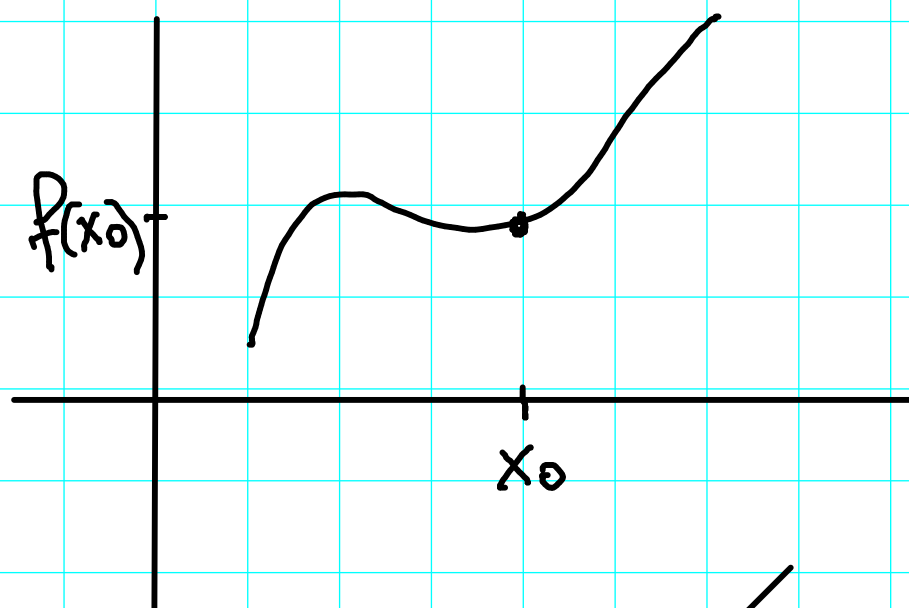
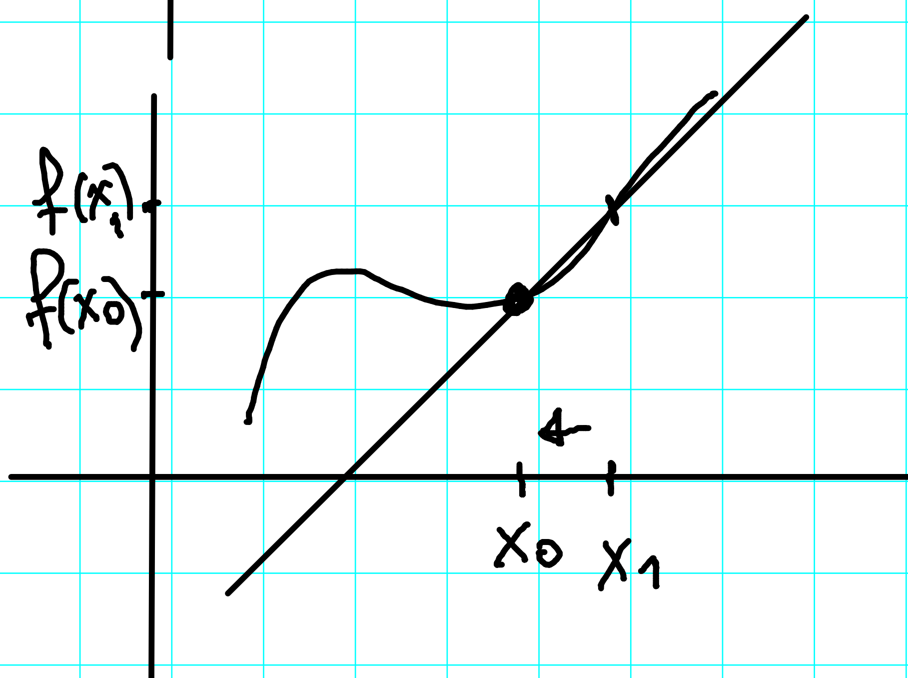
Derivata $\leftrightarrow$ tangente a una curva



$y = f(x)$



Dato $x \neq x_0$ traccio la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$

l'equazione di questa retta è

$$y = m(x - x_0) + q \qquad q = f(x_0)$$

$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$ passa per $(x_0, f(x_0))$

se voglio che passi per $(x_1, f(x))$ $m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

VERIFICA: se

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

l'equazione è verificata in x_0, x_1

$x = x_0$ $\quad y = f(x_0) + 0 = f(x_0)$

$x = x_1$

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\cancel{x_1 - x_0}}(\cancel{x_1 - x_0}) =$$

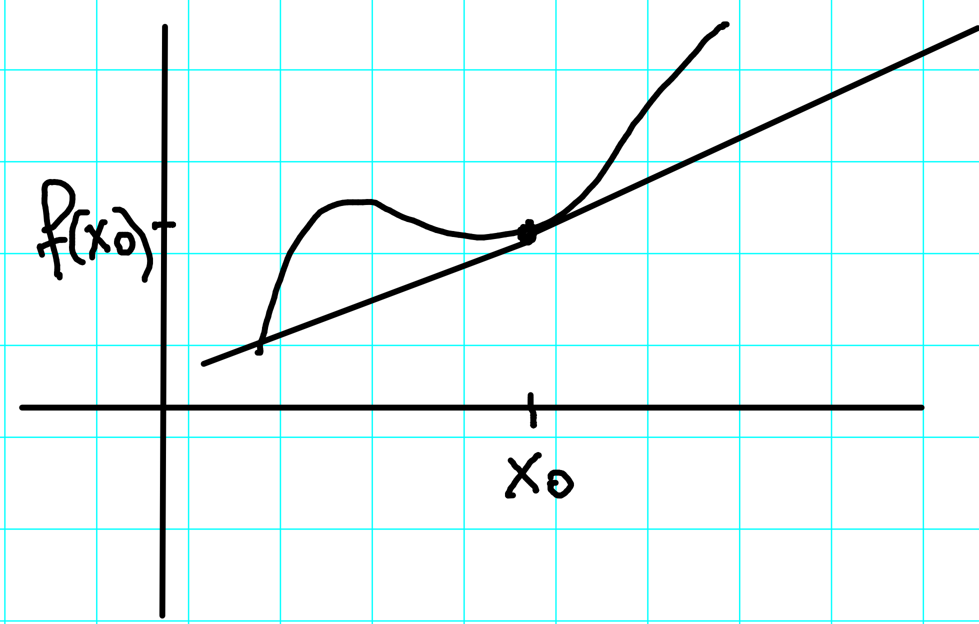
$$f(x_0) + f(x_1) - f(x_0) = f(x_1)$$

LA RETTA PASSA PER $(x_0, f(x_0))$ $(x_1, f(x_1))$

$$\boxed{y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$$

MUOVO $x_1 \to x_0$

Allo fine



La retta finale ha equazione

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$ dove

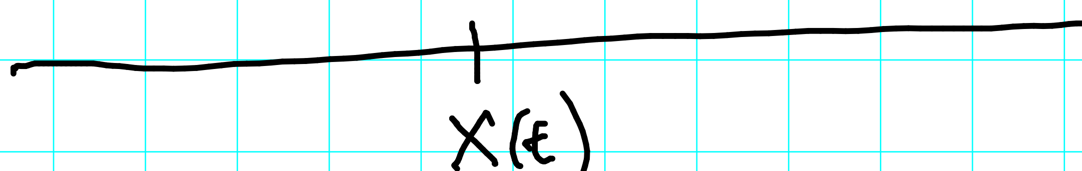
$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (*)$$

(se tale limite esiste)

NOTAZIONE Rapporto incrementale di f tra x_0 e x_1 $(*)$ m = limite del rapp. increm.

Altro punto di vista.

Punto che all'istante t si trova su una retta, nella posizione $x = x(t)$



Se $t_0 \neq t_1$ $\qquad x(t_1) - x(t_2)$

$=$ spazio percorso tra t_0 e t_1

$$\frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = \text{VELOCITÀ MEDIA NELL'INTERVALLO TEMPORALE } [t_0, t_1]$$

Se esiste $\lim_{t_1 \to t_0} \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$ e lo chiamo VELOCITÀ ALL'ISTANTE t_0

IDEA: la retta tangente è la "migliore approssimazione" di f vicino a x_0. IN CHE SENSO ?!

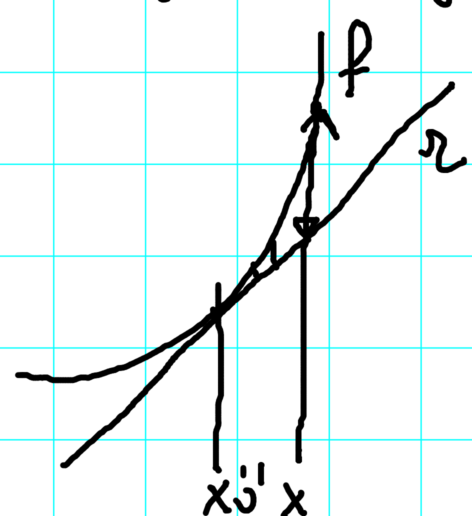
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0 \iff$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right) = 0 \iff$$

$$f(x) - \underbrace{\left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right)}_{\text{retta tangente } r(x)} = o(x - x_0) \iff$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$



lo scarto $f(x) - r(x)$ va a zero più velocemente di $x - x_0$

Rifacendo i calcoli a rovescio si vede

se $f(x) = f(x_0) + m(x-x_0) + o(x-x_0)$

$\Rightarrow$ f è derivabile e $m = f'(x_0)$

f DERIVABILE IN $x_0 \Longrightarrow$ CONTINUA IN x_0

Dim. So che

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

(ricordi di prima)

$$\Longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} \to 0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}$$

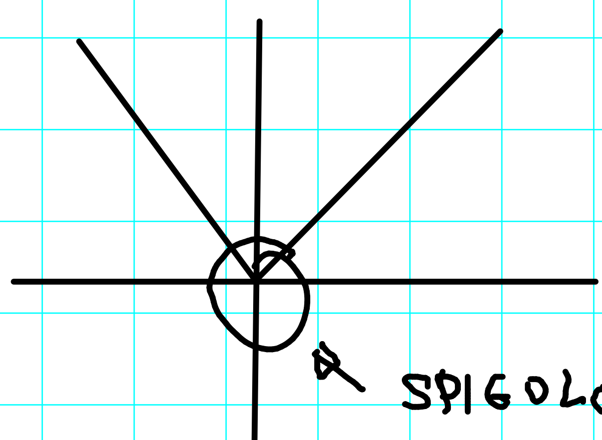
se $x \to x_0$ $\qquad f'(x_0)\cdot 0 \qquad 0$

dunque $f(x) \to f(x_0)$

NON VALE $\Leftarrow$

Se $f(x) = |x|$ f NON È DERIVABILE IN 0

(ma è continua in 0)



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

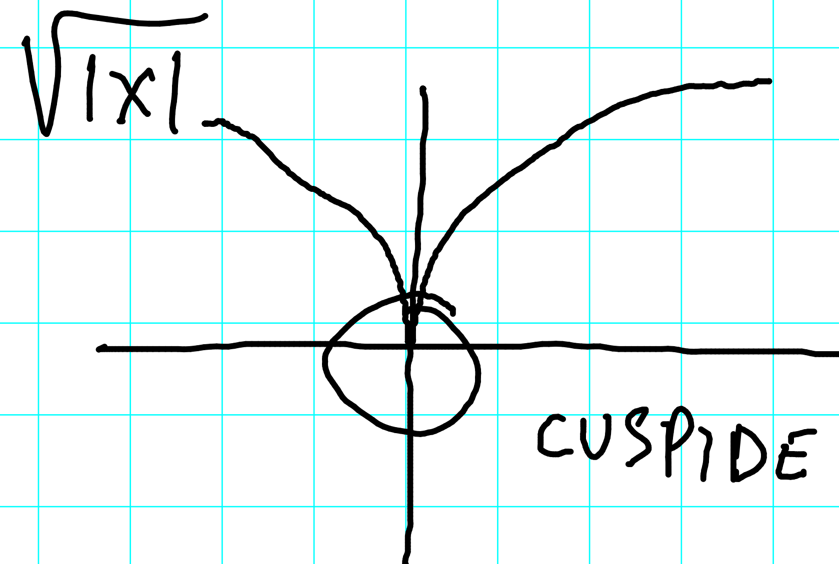
mentre $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

$$\Rightarrow \nexists \; f'(0)$$

(potrei dire che esistono derivata destra/sinistra eguali a $1 / -1$ $\leftrightarrow$ SPIGOLO)

Mentre se $\lim_{x \to x_0^+ / x^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ CUSPIDE

Esempio



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|0|}}{x - 0} =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{|x|} - \sqrt{|0|}}{x - 0} = \lim \frac{\sqrt{-x}}{-x} = -\infty$$

Derivata del prodotto:

Devo fare

aggiungo e tolgo $f(x)g(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \underset{\downarrow}{f(x)}\ \underset{\downarrow}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x - x_0}} + \underset{\downarrow}{g(x_0)}\ \underset{\downarrow}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}}$$

$$f(x_0) \qquad g'(x_0) \qquad\qquad g(x_0) \qquad f'(x_0)$$

Derivata di $\frac{1}{f}$.

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)\, f(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$- \frac{1}{f(x) f(x_0)} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (f(x_0) \neq 0)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$- \frac{1}{f(x_0)^2} \qquad\qquad f'(x_0)$$

- . - -

Se voglio derivare $\frac{f}{g} = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{(-g')}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

PAUSA

Derivata di "$f \circ g$" $= f(g(x))$ "

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = (??)$$

LA DIM. SI PUÒ AGGIUSTARE SENZA IPOTESI

(e posso fare se $g(x) \neq g(x_0)$)

$$\underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{\Vert} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow}$$

$$\frac{f(y_0 + h) - f(y_0)}{h} \qquad g'(x_0)$$

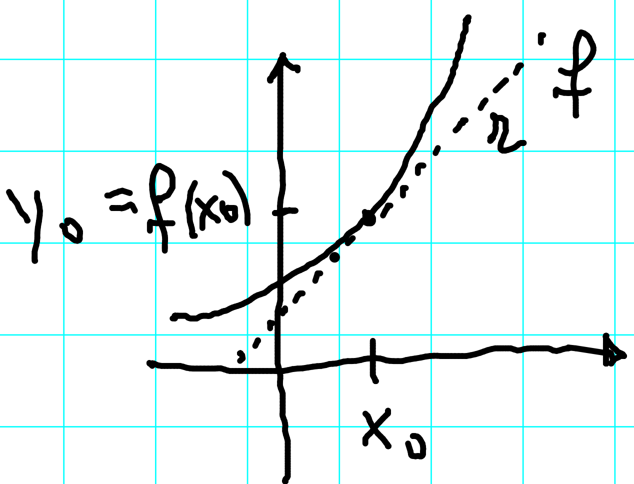
dove $\underline{y_0 = g(x_0)}$ $h = g(x) - g(x_0) \to 0$ (perché g è continua)

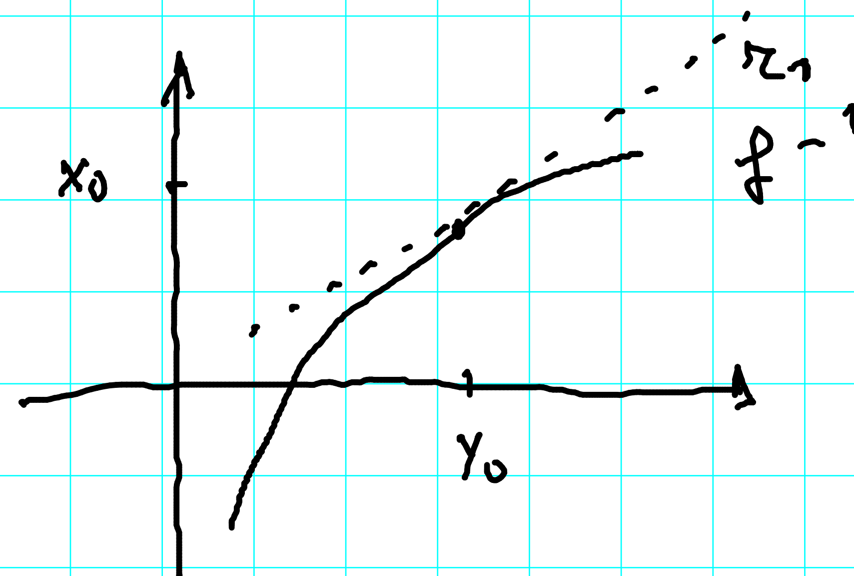
se uso il teorema di composizione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(y_0 + h) - f(y_0)}{h} = f'(y_0)$$

Quindi $\left.\frac{d}{dx} f(g(x))\right|_{x = x_0} = f'(y_0)\, g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$

Derivata di f^{-1} (NO DIM.)



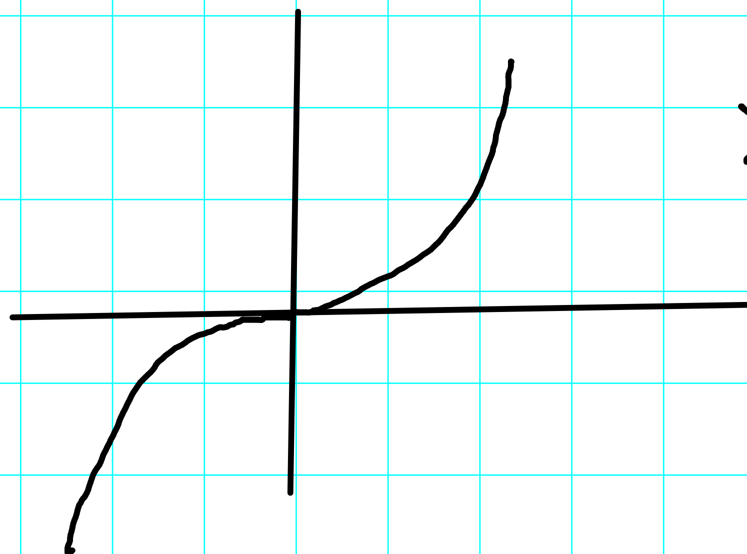


il coeff angolare di $r_1 = \dfrac{1}{\text{coeff ang di } r}$

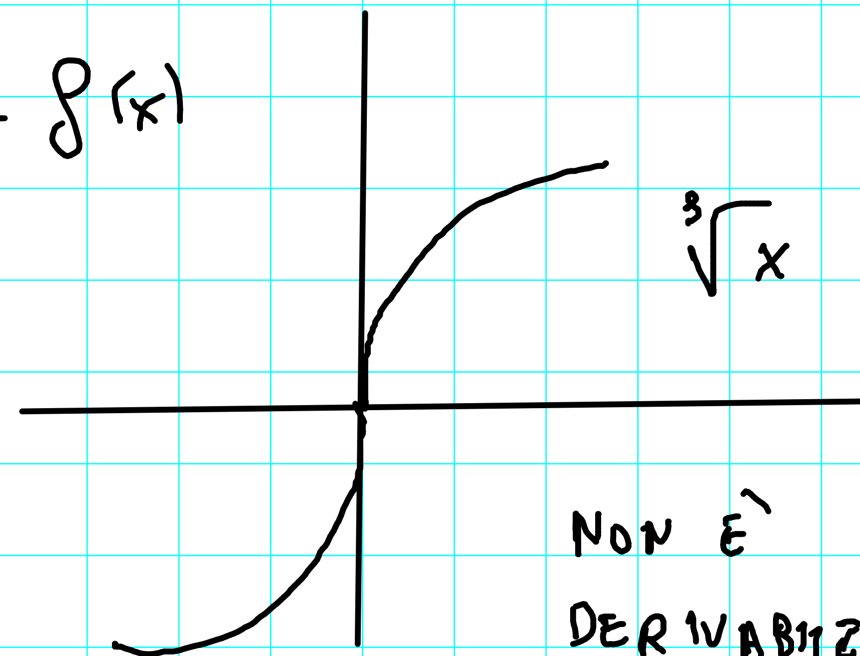
$$\Longleftrightarrow \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (\underline{\underline{y_0 = f(x_0)}})$$

$$\Longleftrightarrow \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

CI VUOLE $f'(x_0) \neq 0$



$x^3 = f(x)$



$\sqrt[3]{x}$

NON È DERIVABILE IN ZERO

("$\sim$ DERIVATA $+\infty$")

---

oltre alle regole di calcolo serve conoscere

qualche derivata.

- $f(x) = x$ $\qquad \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \to 1$

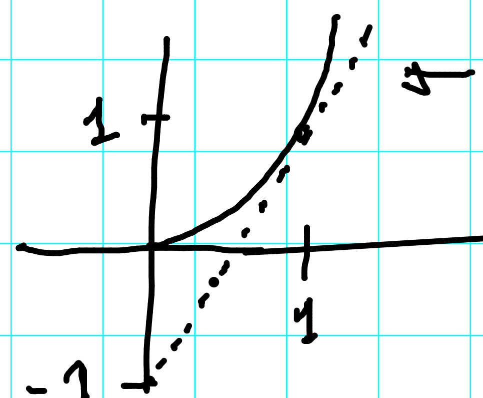
$f'(x) = 1 \quad \forall x$

- $f(x) = 1 \Rightarrow \dfrac{1-1}{x_0 - x} = 0 \to 0$

$f'(x) = 0$

- $f(x) = x^2 = x \cdot x$ (derivata del prodotto)

$$f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$



$\leftarrow y = 1 + 2(x-1) = -1 + 2x$

- $f(x^3) = x^2 \cdot x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$

$\vdots$

$f(x) = x^n$ (INDUZIONE) $\boxed{f'(x) = n x^{n-1}}$

n INTERO ≥ 0

- $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ (derivata del reciproco) $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = (-n) x^{-2n+n-1} = (-n) x^{-n-1}$$

quindi anche se $n < 0$ se $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

Derivata di e^x

(1) $x_0 = 0$ devo fare $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (limite notevole)

(2) x_0 generico.

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow[t \to 0]{x \to x_0} e^{x_0}$$

pongo $t = x - x_0$ (cambio di variabile)

$\Rightarrow$ derivata di e^x = e^x

Se considero A^x invece di e^x ?

$A^x = e^{\ln(A^x)} = e^{x \ln(A)}$ (derivata della composta

$f(y) = e^{y} \qquad g(x) = \ln(A)x$

$e^{x\ln(A)} = f(g(x))$

la derivata $\rightarrow$ $f'(g(x)) \cdot g'(x) =$

$e^{g(x)} g'(x) = e^{x\ln(A)} \cdot \ln(A) =$

$\ln(A) \cdot A^{x}$

Derivata di $\ln(x)$

(1° modo) Uso la definizione

$$\frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} = \frac{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}{x - x_0} =$$

$$\ln\left(\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}\right) = \ln\left(\left(\frac{x_0 + x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}\right) =$$

$$\ln\Bigg(\underbrace{1 + \frac{x-x_0}{x_0}}_{\circledast}\Bigg)^{\frac{1}{x-x_0}} \qquad \left(y = x - y_0 \to 0\right)$$

$$\circledast = \left(1 + \frac{y}{x_0}\right)^{\frac{1}{y}} \xrightarrow[\;]{\substack{x \to x_0 \\ \Updownarrow \\ y \to 0}} e^{\frac{1}{x_0}} \implies$$

$$\ln(*) \to \ln\left(e^{\frac{1}{x_0}}\right) = \frac{1}{x_0}$$

DERIVATA DI $\ln(x) = \dfrac{1}{x}$

(2 MODO) usando la derivata di f^{-1}

$f(x) = \ln(x)$ $\qquad$ $g(y) = e^{y}$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

Derivata di X^{α} con $\alpha \in \mathbb{R}$ $(x>0)$

$$X^{\alpha} = e^{\alpha \ln(x)}$$ (derivata della composizione)

$$\left(\frac{d}{dy} e^{y}\Big|_{y=\alpha \ln(x)}\right) \cdot \left(\frac{d}{dx} \alpha \ln(x)\right) =$$

$$e^{y}\Big|_{y=\alpha \ln(x)} \cdot \frac{\alpha}{x} = \frac{e^{\alpha \ln(x)}}{x} \alpha = \alpha \frac{X^{\alpha}}{x} = \alpha X^{\alpha-1}$$