ANALISI 1 [1]
SETTIMA / OTTAVA LEZIONE
Confronto tra infinitesimi e infiniti
Sottosuccessioni
Limiti notevoli
Limiti di funzioni

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Successioni asintotiche

Definizione

Siano $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni. Diremo che* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sono* ***asintotiche****, se*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Per indicare che $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sono asintotiche scriveremo*

$$a_n \simeq b_n$$

Osservazione

C'è un problema: bisogna richiedere: $b_n \neq 0$.
Per esempio non possiamo scrivere $0 \simeq 0$.
Potremmo però modificare leggermente la definizione: $a_n \simeq b_n$ *se esiste una terza successione* $\{c_n\}$ *tale che*

$$c_n \to 1, \quad a_n = b_n c_n$$

Nella pratica però la prima forma della definizione va sempre bene.

Proprietà

La relazione $a_n \simeq b_n$ *è* ***riflessiva***, ***simmetrica*** *e* ***transitiva***.

Esempi

$$\frac{n}{1+n^2} \simeq \frac{1}{n}, \qquad n^4 \simeq \left(\frac{n^3}{1+n}\right)^2, \qquad \frac{n^3+\sin(n)}{n^2-n+2} \simeq n$$

Teorema (facile ma importante)

Se

$$a_n \simeq a'_n, \quad b_n \simeq b'_n, \quad c_n \simeq c'_n,$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n b_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a'_n b'_n}{c'_n}$$

nel senso che $\frac{a_n b_n}{c_n}$ *e* $\frac{a'_n b'_n}{c'_n}$ *hanno lo* ***stesso carattere*** *(una è regolare se e solo se lo è l'altra) e l'equaglianza sopra vale se hanno senso i suoi termini.*

Ordini di infinito

Definizione

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Diremo che $\{a_n\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\{b_n\}$, se

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$$

Osservazione

Anche in questo caso bisogna richiedere $b_n \neq 0$. Lo si può evitare dicendo che $\{a_n\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\{b_n\}$ se esiste una successione $\{c_n\}$ tale che

$$|c_n| \to +\infty, \quad a_n = b_n c_n$$

Nota

Di solito $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tendono all'infinito (in modulo) e in questo caso si dice che $\{a_n\}$ è un infinito di ordine superiore a $\{b_n\}$. Questo però non è strettamente necessario. Vedi a questo proposito gli esempi che seguono.

Esempi

- $\{n^2\}$ *ha ordine di infinito superiore a quello di* $\{n\}$*;*
- $\{n^3\}$ *ha ordine di infinito superiore a quello di* $\left\{\frac{n^5-n^3}{1+n}\right\}$*;*
- $\{n^2\}$ *ha ordine di infinito superiore a quello di* $\left\{\sqrt{n^2+1}\right\}$*;*
- $\{n\}$ *ha ordine di infinito superiore a quello di* $\{1\}$ *(questo è* ***solo*** *un modo alternativo di dire che* $n \to +\infty$*);*
- $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *ha ordine di infinito superiore a quello di* $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ *(!!!).*

Teorema (principio di sostituzione degli infiniti)

Se $\{a_n\}$ *ha ordine di infinito superiore a quello di* $\{b_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *ha ordine di infinito superiore a quello di* $\{d_n\}$*, allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n+b_n}{c_n+d_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n}$$

(nel senso che se esiste uno dei limiti, esiste anche l'altro e sono eguali).
Si possono trascurare i termini con ordine di infinito più basso.

Ordini di infinitesimo

Definizione

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Diremo che $\{a_n\}$ ha ***ordine di infinitesimo superiore*** *a quello di $\{b_n\}$, se*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Anche qui, se vogliamo ammettere il caso $b_n = 0$ per alcuni n, dovremmo sostituire la riga sopra con la richiesta che $a_n = b_n c_n$ per un'opportuna $\{c_n\}$ tale che $c_n \to 0$.
Un altro modo di dire la proprietà sopra sarà di dire che $\{a_n\}$ ***è un o piccolo di*** *$\{b_n\}$ e scrivere*

$$a_n = o(b_n)$$

Nota

Dire che $\{a_n\}$ ha ordine di infinitesimo superiore a quello di $\{b_n\}$ è esattamente lo stesso che dire $\{b_n\}$ ha ordine di infinito superiore a quello di $\{a_n\}$. Introduciamo comunque entrambe le definizioni perchè, a seconda dei casi è più espressivo usare una o l'altra.

Nota

Di solito $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tendono a zero e in questo caso si dice che $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\{b_n\}$. Questo però non è strettamente necessario (vedi esempi).

Esempi

- $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$; $\frac{n^2-n}{n^5+n^3+2} = o\left(\frac{2}{n^2}\right)$;
- $\frac{1}{n} = o(1)$; $n = o(n^2)$ *(!!!)*.

Quindi dire che $a_n = o(1)$ è un altro modo di dire che $a_n \to 0$.

Teorema (principio di sostituzione degli infinitesimi)

Se $\{a_n\}$ ha ordine di infinitesimo superiore a quello di $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ ha ordine di infinitesimo superiore a quello di $\{d_n\}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n+b_n}{c_n+d_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{d_n}$$

(nel senso che se esiste uno dei limiti, esiste anche l'altro e sono eguali).
Si possono trascurare i termini con ordine di infinitesimo più alto.

I principi di sostituzione degli infinitesimi/infiniti sono usati largamente nel calcolo dei limiti. Per esempio quando si dimostra che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3-4n^2+n+2}{3n^3+2n^2+7} = \frac{2}{3}$$

mediante la catena di passaggi:

$$\frac{2n^3-4n^2+n+2}{3n^3+2n^2+7} = \frac{2n^3}{3n^3}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{3n}+\frac{7}{3n^3}} \to \frac{2}{3}\frac{1-0+0+0}{1+0+0} = \frac{2}{3}$$

si mette in evidenza (a numeratore e a denominatore) l'infinito di ordine superiore e si ripete la dimostrazione fatta per dimostrare il principio di sostituzione degli infiniti. Si potrebbe allora applicare direttamente tale principio:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3-4n^2+n+2}{3n^3+2n^2+7} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{3n^3} = \frac{2}{3}$$

dopo aver osservato che i termini trascurati ($-4n^2+n+2, 2n^2+7$) hanno ordine di infinito più basso del corrispondente termine non trascurato ($2n^3/3n^3$).

Analogamente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-\sqrt{n^8+1}}{n^2+4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\sqrt{n^8+1}}{n^2} = -\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^8+1}{n^4}} = (*)$$

dove il primo passaggio è giustificato dal fatto che $\sqrt{n^8+1}$ è un infinito di ordine superiore a n^3 e n^2 è un infinito di ordine superiore a 4. Continuando nel calcolo del limite possiamo osservare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^8+1}{n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^8}{n^4} = \lim_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$$

(n^8 è un infinito di ordine superiore a 1) e quindi $(*) = -\infty$.

Esercizio

Ordinare le seguenti successioni per ordine di infinito crescente.

$$a_n := \frac{n+3}{3n+1}, \qquad b_n := \frac{n+3^n}{3n+4^n}, \qquad c_n := \frac{n^5+n3^n}{1+2^n},$$

$$d_n := \frac{n!+n^2 3^n}{n^n+2^n}, \qquad e_n := \frac{3^n+n^2 2^n}{1+n}, \qquad f_n := n^2+n^4 3^{-n}$$

Nota

I principi di sostituzione o il primo teorema sulle successioni asintotiche valgono ***SOLO*** *nei casi indicati nei rispettivi enunciati. Per esempio il ragionamento*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3+1}-n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4}-n^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{n} = 0$$

in cui si trascura n^3+1 *che è un infinito di ordine più basso rispetto a* n^4

È SBAGLIATO

(il caso non è contemplato da nessuno dei teoremi precedenti)
In effetti facendo correttamente i calcoli il limite sopra fa $\frac{1}{2}$*:*

Ordini di infinitesimo - O grandi

Definizione

Siano $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni. Diremo che* $\{a_n\}$ *è* ***o grande*** *di* $\{b_n\}$*, se*

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \text{ è una successione limitata}$$

e scriveremo

$$a_n = O(b_n)$$

Anche qui, se vogliamo ammettere il caso $b_n = 0$ *per alcuni* n*, dovremmo sostituire la riga sopra con la richiesta che* $a_n = b_n c_n$ *per un'opportuna* $\{c_n\}$ *con* $\{c_n\}$ *limitata.*

Osservazione

La nozione $a_n = O(b_n)$ *vuole esprimere il fatto che* $\{a_n\}$ *ha ordine di infinitesimo maggiore o eguale a quello di* $\{b_n\}$*. In effetti tale relazione è riflessiva e transitiva, mentre* $a_n = o(b_n)$ *è solo transitiva.*

- $a_n = O(a_n)$;
- $a_n = O(b_n)$, $b_n = O(c_n)$ *implica* $a_n = O(c_n)$;
- $a_n = o(b_n)$, $b_n = o(c_n)$ *implica* $a_n = o(c_n)$.

Nota

Non tutte le successioni sono confrontabili rispetto all'ordine di infinitesimo (o infinito). Per esempio se

$$a_n = (1 - (-1)^n)n, \quad b_n = 1$$

($a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 6, a_4 = 0, a_5 = 10, a_6 = 0 \ldots$)
allora il rapporto $\dfrac{a_n}{b_n}$ (che coincide con a_n) non ha limite e non è neppure limitato.
*Quindi non vale **NESSUNA** tra le*

$$a_n = o(b_n), \quad a_n = O(b_n), \quad b_n = o(a_n), \quad b_n = O(a_n).$$

Osservazione

*Le scritture $a_n = o(b_n)$/ $a_n = O(b_n)$ si riveleranno molto comode ma non sono rigorose. In effetti il simbolo $=$ utilizzato in queste scritture **non è una vera eguaglianza**. Infatti dalle proprietà vere*

$$\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

***NON** si può dedurre per differenza*

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right) - o\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

In realtà la formulazione corretta sarebbe

$$\{a_n\} \in o(b_n)$$

$$o(b_n) = \{\textit{successioni con ordine di infinitesino maggiore di } \{b_n\}\}.$$

Allora non è strano che $o\left(\frac{1}{n}\right) - o\left(\frac{1}{n}\right)$ non sia zero, nel senso che l'insieme di tutte le possibili differenze non è $\{0\}$.

Teorema (Proprietà de gli o piccoli/ o grandi)

Siano $\{a_n\}$ *e* $\{a'_n\}$ *successioni fissate.*

1. $b_n \simeq a_n \Leftrightarrow b_n = a_n + o(a_n)$;
2. $b_n = o(a_n) \Rightarrow b_n = O(a_n)$ $\quad o(a_n) = O(a_n)$;
3. *Se* $b_n = O(a_n), b'_n = O(a_n) \Rightarrow b_n + b'_n = O(a_n)$ $\quad O(a_n) + O(a_n) = O(a_n)$;
4. *Se* $b_n = o(a_n), b'_n = o(a_n) \Rightarrow b_n + b'_n = o(a_n)$ $\quad o(a_n) + o(a_n) = o(a_n)$;
5. *Se* $b_n = O(a_n), b'_n = o(a_n) \Rightarrow b_n + b'_n = O(a_n)$ $\quad O(a_n) + o(a_n) = O(a_n)$;
6. *Se* $b_n = O(a_n), b'_n = O(a'_n) \Rightarrow b_n b'_n = O(a_n a'_n)$ $\quad O(a_n)O(a'_n) = O(a_n a'_n)$;
7. *Se* $b_n = o(a_n), b'_n = o(a'_n) \Rightarrow b_n b'_n = o(a_n a'_n)$ $\quad o(a_n)o(a'_n) = o(a_n a'_n)$;
8. *Se* $b_n = O(a_n), b'_n = o(a'_n) \Rightarrow b_n b'_n = o(a_n a'_n)$ $\quad O(a_n)o(a'_n) = o(a_n a'_n)$;
9. *Se* $b_n = O(a_n), c_n = O(b_n) \Rightarrow c_n = O(a_n)$ $\quad O(O(a_n)) = O(a_n)$;
10. *Se* $b_n = O(a_n), c_n = o(b_n) \Rightarrow c_n = o(a_n)$ $\quad o(O(a_n)) = o(a_n)$;
11. *Se* $b_n = o(a_n), c_n = O(b_n) \Rightarrow c_n = o(a_n)$ $\quad O(o(a_n)) = o(a_n)$;
12. *Se* $b_n = o(a_n), c_n = o(b_n) \Rightarrow c_n = o(a_n)$ $\quad o(o(a_n)) = o(a_n)$;

Nota

Dalla tabella prececente risulta $o(a_n) - o(a_n) = o(a_n)$,

Esempi

$$\frac{n}{n^2+1} = \dots$$ ⇒

$$\sqrt{n^2+1} - n = \dots$$ ⇒

$$\sqrt{n^2+n+1} - n = \dots$$ ⇒

Esercizio

Mettere in fila (con in po' di pazienza), in ordine crescente di infinitesimo, tutte le successioni proposte a margine della sesta lezione - può capitare che ci siano successioni con lo stesso ordine, cioè tali che $a_n = O(b_n)$ *e* $b_n = O(a_n)$.

Teorema

Siano $\{a_n\}$ *una successione di numeri reali avente limite* $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*:* $a_n \to l$ *e sia* $\{\sigma_n\}$ *una successione* ***di interi*** *tale che* $\sigma_n \to +\infty$*.*
Allora $a_{\sigma_n} \to l$*.*

Teorema

*Siano $\{a_n\}$ una successione di numeri reali avente limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$: $a_n \to l$ e sia $\{\sigma_n\}$ una successione **di interi** tale che $\sigma_n \to +\infty$.*
Allora $a_{\sigma_n} \to l$.

DIM.(caso $l \in \mathbb{R}$) Per definizione di limite, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che

$$\forall n \geq \bar{n} \quad |a_n - l| < \varepsilon.$$

Dato che $\sigma_n \to +\infty$ esiste n_1 tale che

$$\forall n \geq n_1 \quad \sigma_n \geq \bar{n}.$$

Mettendo in file le due condizioni: dato $\varepsilon > 0$ esiste n_1 tale che

$$\forall n \geq n_1 \quad |a_{\sigma_n} - l| < \varepsilon$$

e quindi abbiamo dimostrato $a_{\sigma_n} \to l$.

Sottosuccessioni

Definizione

Sia $\{a_n\}$ una successione. Chiameremo ***successione estratta*** *da $\{a_n\}$ o* ***sottosuccesione*** *di $\{a_n\}$ una qualunque $\{b_n\}$ tale che*

$$b_n = a_{\sigma_n}$$

dove $\{\sigma_n\}$ è una successione strettamente crescente di numeri interi ($\{\sigma_n\}$ è una selezione di indici, che non si ripetono).

Esempio

La successione $\{b_n\} = \{4n^2\}$ è un' estratta dalla successione $\{a_n\} = \{n^2\}$, in quanto

$$b_n = a_{2n}$$

($\{b_n\}$ si ottiene da $\{a_n\}$ selezionando solo gli indici pari).

Teorema (limite di sottosuccessioni)

Se $a_n \to l$ *e* $\{b_n\}$ *è un' estratta dalla* $\{a_n\}$*, allora* $b_n \to l$

DIM. Basta notare che, se $\{\sigma_n\}$ è una successione crescente di interi, allora $\sigma_n \longrightarrow +\infty$.

Nota

Il teorema sopra non è reversibile. Vedi ad esempio $a_n = (-1)^n$ ⇒
Tale teorema può essere usato per provare che una successione NON ha limite (come nell'esempio sopra).

Teorema

Sia $\{a_n\}$ *una successione e siano* $\{\sigma'_n\}$ *e* $\{\sigma''_n\}$ *due successioni strettamente crescenti di interi tali che*

$$\mathbb{N} = \{\sigma'_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sigma''_n : n \in \mathbb{N}\}$$

(le immagini delle due successioni coprono tutto $\mathbb{N}$*).*
Se $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*,* $a_{\sigma'_n} \to l$ *e* $a_{\sigma''_n} \to l$*, allora* $a_n \to l$*.*

L'esempio tipico è

$$a_{2n} \to l, \quad a_{2n+1} \to l \Rightarrow a_n \to l$$

Esercizio

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{A^n n!}{n^n} = ?$$

⇒

Altri limiti importanti

Proprietà

- *Se* $|a_n| \to +\infty \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$ ⇒
- *Se* $a_n \to 0 \Rightarrow (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e$ ⇒
- *Se* $a_n \to 0 \Rightarrow \ln(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to 1$ ⇒
- *Se* $a_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{e^{a_n} - 1}{a_n} \to 1$ ⇒
- *Se* $a_n \to 0, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{(a_n + 1)^{\alpha} - 1}{a_n} \to \alpha$ ⇒

Nota

Da quanto sopra si deduce che (anzi è equivalente a), se $a_n \to 0$

- $\ln(1 + a_n) = a_n + o(a_n)$;
- $e^{a_n} = 1 + a_n + o(a_n)$;
- $(a_n + 1)^{\alpha} = 1 + \alpha a_n + o(a_n)$

Punti di accumulazione

Definizione

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si dice che x_0 è di ***accumulazione*** *per A se esiste una successione $\{a_n\}$ di punti di A, diversi da x_0, che tende ad x_0:*

$$a_n \in A, \quad a_n \neq x_0, \quad a_n \to x_0.$$

Notiamo che si può anche dire

"esiste una successione in $A \setminus \{x_0\}$ che tende a x_0".

Nota

Ovviamente se $x_0 = \pm\infty$ la condizione $a_n \neq x_0$ è automaticamente verificata.

Definizione

Se $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e x_0 non è di accumulazione per A si dice che x_0 è un ***punto isolato*** *in A*

Esempio

0 *è punto di accumulazione per* $]0,1]$. *Infatti la successione* $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ *è tutta contenuta in* $]0,1]$ *(quindi non vale mai zero) e tende a zero.*

Esempio

Se $A = [0,1] \cup \{2\}$, *allora* 2 *è isolato in* A *– vicino a* 2 *non ci sono altri punti di* A.

Esempio

$+\infty$ *e* $-\infty$ *sono di accumulazione per* $\mathbb{R}$. *Per vederlo basta considerare le successioni definite da* $a_n = n$ *e* $a'_n = -n$.

Proprietà

In generale I *è un intervallo di estremi* $\alpha < \beta$ *(che possono appartenere oppure no all'intervallo), allora i punti di accumulazione per* A *sono tutti e soli i punti di* $[\alpha, \beta]$. *Con la convenzione sugli infiniti questo risultato vale anche con* α *o* β *infiniti (quindi nel caso di intervalli illimitati).*

Definizione (Definizione di limite tramite le successioni)

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *un punto di accumulazione per* A. *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *e sia* $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Diremo che l *è il limite di* $f(x)$ *per* x *tendente a* x_0 *se*

$$\text{per ogni successione } \{x_n\} \text{ di punti di } A \setminus \{x_0\} \text{ con } x_n \to x_0$$
$$\text{si ha } f(x_n) \to l.$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = l \qquad \text{o anche } f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$$

Spesso, quando il punto x_0 *è chiaro dal contesto, scriveremo semplicemente* $f(x) \to l$.

Nota

Il fatto che x_0 *sia di accumulazione per* A *assicura che esista qualche successione* $\{x_n\}$ *di punti di* $A \setminus \{x_0\}$ *con* $x_n \to x_0$.

Nota

Ai fini del limite l'eventuale valore di f *in* x_0 ***NON CONTA NULLA***.

Definizione di limite per eccesso e per difetto

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *un punto di accumulazione per* A. *Sia* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *e sia* $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Diremo che $f(x)$ *tende a* l *per eccesso (per difetto) per* x *tendente a* x_0 *se*

$$\text{per ogni successione } \{x_n\} \text{ di punti di } A \setminus \{x_0\} \text{ con } x_n \longrightarrow x_0$$
$$\text{si ha } f(x_n) \longrightarrow l^+ \ (l^-).$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \longrightarrow x_o} f(x) = l^+ \ (l^-) \qquad \text{o anche } f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow x_0} l^+ \ (l^-)$$

Spesso, quando il punto x_0 *è chiaro dal contesto, scriveremo semplicemente* $f(x) \longrightarrow l^+ \ (l^-)$.

Punti di accumulazione da destra e da sinistra

Definizione

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si dice che x_0 è di ***accumulazione da destra (da sinistra)*** *per A se esiste una successione $\{a_n\}$ di punti di $A \setminus \{x_0\}$ che tende a x_0^+ (a x_0^-)*

$$a_n \in A, \quad a_n > x_0, \ (a_n < x_0) \quad a_n \to x_0.$$

Nota

Se $+\infty$ è di accumulazione per A allora è di accumulazione da destra – analogamente se $-\infty$ è di accumulazione per A allora è di accumulazione da sinistra.

Osservazione

Un punto x_0 è di accumulazione per A se e solo se è di accumulazione da destra per A o è di accumulazione da sinistra per A (eventualmente entrambe le cose).

Esempio

Se $A =]0,1[$ *allora l'insieme dei suoi punti di accumulazione da sinistra è costituito da* $]0,1]$.
0 *è di accumulazione ma non è di accumulazione da sinistra.*
Analogamente l'insieme dei punti di accumulazione da destra è $[0,1[$.
1 *è di accumulazione ma non è di accumulazione da destra.*

Limiti da destra e da sinistra

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *un punto di accumulazione da destra (da sinistra) per* A. *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *e sia* $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Diremo che l *è il limite di* $f(x)$ *per* x *tendente a* x_0 *se*

$$\text{per ogni successione } \{x_n\} \text{ di punti di } A \setminus \{x_0\} \text{ con } x_n \to x_0^+ \ (x_0^-)$$
$$\text{si ha } f(x_n) \to l.$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_0^+ \ (x_0^-)} f(x) = l \qquad \text{o anche } f(x) \xrightarrow{x \to x_0^+ \ (x_0^-)} l$$

Osservazione

Si possono combinare le definizioni di limite per eccesso/difetto con quelle di limite da destra /da sinistra (nel modo ovvio) ottendo cose del tipo

$$\lim_{x \to x_0^+ \ (x_0^-)} f(x) = l^+ \ (l^-) \qquad o \ anche \ f(x) \xrightarrow{x \to x_0^+ \ (x_0^-)} l^+ \ (l^-)$$

Teorema

Se $f : A \to \mathbb{R}$ e se x_0 è punto di accumulazione sia da destra che da sinistra per A, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \ e \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

L'esistenza del limite equivale all'esistenza del limite destro e di quello sinistro e alla loro eguaglianza.

Definizione

Anche per i limiti di funzione diremo che f è ***regolare*** *(in x_0) se esiste il limite di f per $x \to x_0$; che è* ***convergente*** *(in x_0) se f ammette limite finito e che è* ***divergente*** *(positivamente o negativamente) se f tende a pi'u o meno infinito.*

Definizione

Sia x_0 un punto in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Diremo che una proprietà $\mathscr{P}(x)$ è verificata ***vicino*** *a x_0 se*

caso $x_0 \in \mathbb{R}$ *Esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ $\mathscr{P}(x)$;*

caso $x_0 = \infty$ *Esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x > M$ $\mathscr{P}(x)$;*

caso $x_0 = -\infty$ *Esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x < M$ $\mathscr{P}(x)$.*

Nota che "vicino a $+\infty$" è sinonimo di "definitivamente".

Teorema (unicità del limite)

Se per $x \to x_0$ *si ha* $f(x) \to l_1$ *e* $f(x) \to l_2$, *allora* $l_1 = l_2$.

Teorema (limite e limitatezza)

Se f *è convergente in* x_0, *allora* f *è limitata vicino a* x_0.

Teorema (Permanenza del segno)

Se $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$ *e* $l > 0$, *allora* $f(x) > 0$ *vicino a* x_0.

Teorema (monotonia del limite)

Se $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$ *e se* $f(x) \geq 0$ *vicino a* x_0, *allora* $l \geq 0$.

Teorema (del confronto o dei due carabinieri)

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *vicino s* x_0 *e se* $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$, $h(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$, *allora* $g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$. *Se* $l = +\infty$ $(-\infty)$ *non serve* h *(non serve* f*).*

Teorema

Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$,
x_0 *un punto di accumulazione per* A *(in* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *),*
$l_1, l_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Supponiamo che $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_1$ *e che* $g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_2$. *Allora*

- $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_1 + l_2$, *purché* $l_1 + l_2$ *abbia senso.*
- $f(x)g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_1 \cdot l_2$, *purché* $l_1 \cdot l_2$ *abbia senso.*
- $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \to x_0} l_1/l_2$, *purché* l_1/l_2 *abbia senso.*
- *Se* $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$ *e* g *è limitata vicino a* x_0 *allora* $f(x)g(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$.

Teorema (Limite della composizione)

Siano A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, siano $g : A \to B$ e $f : B \to \mathbb{R}$.
Siano x_0 un punto di accumulazione per A, y_0 un punto di accumulazione per B, $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e supponiamo

$$f(y) \xrightarrow{y \to y_0} l \qquad g(x) \xrightarrow{x \to x_0} g(y) \to y_0.$$

Supponiamo inoltre che valga UNA tra le due condizioni seguenti:

- *vicino a x_0 si ha $g(x) \neq y_0$;* *(per es. se $y_0 \notin B$)*
- *$y_0 \in B$ e $f(y_0) = l$.*

Allora

$$f(g(x)) \xrightarrow{x \to x_0} l$$