ANALISI 1 [1]
NONA/DECIMA LEZIONE
Limiti notevoli di funzioni
Funzioni continue

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Limiti destro e sinistro per funzioni monotone DIM

Teorema

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione crescente (decrescente) dove I è un intervallo di estremi $a < b$ (anche infiniti). Allora per ogni x con $a \leq x_0 < b$ esiste

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) \quad \left(= \sup_{x > x_0} f(x) \right).$$

Analogamente per ogni x con $a < x_0 \leq b$ esiste

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \quad \left(= \inf_{x < x_0} f(x) \right).$$

Di conseguenza, se $a < x_0 < b$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) \geq f(x_0) \geq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right).$$

Limiti notevoli

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} &= e\\
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= 1\\
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} &= 1\\
\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} &= \alpha\\
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} &= 1 \qquad \Rightarrow\\
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Osservazione

Il teorema di composizione nei limiti può essere interpretato come un teorema di "cambio di variabile" nei limite. Per esempio dimostriamo che

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

Se chiamiamo $g(x) = x - 1$ *il limite sopra si presenta come*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+g(x))}{g(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

dove nella prima eguaglianza si sfrutta il teorema di composizione – notiamo che $g(x) \xrightarrow{x\to 1} 0$ *(quindi il limite per* $x \to 1$ *si è trasformato in un limite per* $y \to 0$*) e che* $g(x) \neq 0$ *per* $x \neq 1$ *(e quindi risulta verificata l'ipotesi del teorema suddetto).*
Formalmente si può dire: "pongo $y = x - 1$*", noto che per* $x \to 1$ *si ha* $y \to 0$ *e* $y \neq 0$*; allora posso sostituire* $x - 1$ *con* y *e fare il limite per* $y \to 0$

Ordine di infinitesimo per funzioni

Definizione

Siano f e g due funzioni definite vicino a un punto x_0.
Diremo che f e g sono a ***asintotiche*** *(in x_0) se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Diremo che che f è un ***o piccolo di*** *g (in x_0) e scrivendo $f(x) = o(g(x))$ se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Diremo anche che f è un ***o grande*** *di g e scrivendo $f(x) = O(g(x))$ se*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ è limitata vicino a } x_0.$$

Teorema (Proprietà de gli o piccoli/ o grandi per funzioni)

Siano f e g due funzioni definite vicino a un punto x_0.

1. $f \simeq g \Leftrightarrow f = g + o(g) \Rightarrow f = O(g)$ $\qquad g + o(g) = O(g)$;
2. $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$ $\qquad o(g) = O(g)$;
3. $Se\, f_1 = O(g), f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = O(g)$ $\qquad O(g) + O(g) = O(g)$;
4. $Se\, f_1 = o(g), f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = O(g)$ $\qquad o(g) + O(g) = O(g)$;
5. $Se\, f_1 = o(g), f_2 = o(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g)$ $\qquad o(g) + o(g) = o(g)$;
6. $Se\, f_1 = O(g_1), f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$ $\qquad O(g_1)O(g_2) = O(g_1 g_2)$;
7. $Se\, f_1 = o(g_1), f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ $\qquad o(g_1)O(g_2) = o(g_1 g_2)$;
8. $Se\, f_1 = o(g_1), f_2 = o(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ $\qquad o(g_1)o(g_2) = o(g_1 g_2)$;
9. $Se\, f = O(g), h = O(f) \Rightarrow h = O(g)$ $\qquad O(O(g)) = O(g)$;
10. $Se\, f = o(g), h = O(f) \Rightarrow h = o(g)$ $\qquad O(o(g)) = o(g)$;
11. $Se\, f = O(g), h = o(f) \Rightarrow h = o(g)$ $\qquad o(O(g)) = o(g)$;
12. $Se\, f = o(g), h = o(f) \Rightarrow h = o(g)$ $\qquad o(o(g)) = o(g)$.

Limiti notevoli in termini di ordine di infinitesimo

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x + o(x) \\
e^x &= 1 + x + o(x) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x) \\
\sin(x) &= x + o(x) \qquad \Rightarrow \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

Continuità

Definizione

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$.
Diremo che f è continua in x_0 se:

- *x_0 è isolato in A;* *(senza altre condizioni !!!)*
- *x_0 è di accumulazione per A e*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Quindi se non ci sono altri punti in A vicino a x_0 ogni f è automaticamente continua in x_0 – per esempio le successioni sono continue in ogni punto di $\mathbb{N}$. Questa convenzione per la verità non ha grossi impatti nella pratica.

Definizione

Diremo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in A se f è continua in x_0 per ogni x_0 di A.

Osservazione

Se $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \notin A$, ma x_0 è di accumulazione per A, e $l \in \mathbb{R}$, allora sono equivalenti le due affermazioni

- *la funzione $\tilde{f} : A \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ definita da*

  $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \neq x_0, \\ l & se\ x = x_0, \end{cases}$$

  è continua in x_0
- $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

In altri termini il limite di f in x_0 è l'unico possibile valore con cui si può estendere f in x_0 in modo che risulti continua.

Teorema

- *(linearità)* *Se f e g sono continue in x_0, α e β sono numeri reali, allora*
$$\alpha f + \beta g \text{ è continua in } x_0.$$
- *Se f e g sono continue in x_0, allora fg è continua in x_0.*
- *f e g sono continue in x_0 e se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è continua in x_0.*
- *(continuità della composizione)*
Se g è continua in x_0 e f è continua in $g(x_0)$ allora $f \circ g$ è continua in x_0.

Definizione (Classificazione delle discontinuità)

Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ con x_0 di accumulazione per A. Supponiamo che f non sia continua in x_0. Distingueremo le seguenti situazioni.

- *Esiste finito $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$.*
  In questo caso si dice che f ha in x_0 una ***discontinuità eliminabile****.*
  In effetti se si considera la nuova funzione $\tilde{f}$ definita da
  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0, \\ l & \text{se } x = x_0, \end{cases}$ *allora $\tilde{f}$ è continua in x_0.*
- *Esistono finiti, ma diversi tra loro $l^+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $l^- = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ (indicati spesso con $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$).*
  In questo caso diciamo che f ha in x_0 una ***discontinuità di salto*** *e chiamiamo* ***salto*** *di f in x_0 la differenza $l^+ - l^-$ $\quad (f(x_0^+) - f(x_0^-))$.*
- *Non vale nessuno dei due casi precedenti (perché il limiti sopra sono infiniti oppure non esistono).*
  Diciamo allora che f ha in x_0 una ***discontinuità essenziale****.*

Teorema degli zeri

.

Teorema

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione* ***continua***. *Se* $f(a)$ *e* $f(b)$ *sono diversi da zero e* ***discordi***, *allora* f ***ha uno zero***:

$$\exists x \in]a, b[: f(x) = 0$$

Notiamo che l'ipotesi sopra si può esprimere dicendo $f(a)f(b) < 0$.

DIM

Teorema di Weierstrass

Teorema

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione* ***continua***. *Allora* f ***ammette massimo e minimo*** *in* $[a, b]$. *Ciò significa:*

$$\exists x_m, x_M \in [a, b] : \forall x \in [a, b] \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M).$$

Ricordiamo che x_m *è detto* ***punto*** *di minimo,* x_M *è detto* ***punto*** *di massimo, mentre il minimo e il massimo sono* $f(x_m)$ *e* $f(x_M)$.

DIM

Teorema dei valori intermedi

Teorema

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ *e sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione* ***continua****. Allora* f *assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo. Se indichiamo con* $m = f(x_m)$ *il minimo e con* $M = f(x_m)$ *il massimo di* f *su* $[a,b]$*, quanto appena affermato corrisponde a dire*

$$\forall\lambda : m \leq \lambda \leq M \quad \exists x \in [a,b] : f(x) = \lambda$$

(se λ *è compreso tra il massimo e il minimo, allora è assunto in una opptuna* x *di* $[a,b]$*).*

DIM

Teorema

Sia I un intervallo di estremi a e b (che possono essere finiti o infiniti e possono essere o non essere in I) e sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora

- *Se f è continua allora l'immagine $f(I)$ è un intervallo.*
- *Viceversa se $J = f(I)$ è un intervallo e se f è monotona, allora f è continua. Inoltre in questo caso gli estremi α e β di J sono dati da*

  $$\alpha = \lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \beta = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

  se f è crescente, mentre se f è decrescente

  $$\beta = \lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \alpha = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

Dunque una funzione monotona è continua se e solo se trasforma intervalli in intervalli.

DIM

Continuità dell'inversa su un intervallo

Teorema

Sia I un ***intervallo*** *(che può essere aperto / chiuso / semiaperto / limitato / illimitato).*
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione ***continua****.*

Allora f è iniettiva se e solo se f è strettamente monotona.

DIM

Una immediata conseguenza dei due teoremi precedenti è

Teorema (Continuità dell'inversa su un intervallo)

Sia I un ***intervallo*** *e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione* ***continua e iniettiva*** *.*

Allora, posto $J = f(I)$ (che è un intervallo), esiste $f^{-1} : J \to I$ e f^{-1} ***è continua****.*

DIM

Da tutto quanto fatto finora le funzioni "elementari" sono tutte continue dove definite. Quindi sono continue:

- $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, se P e Q sono polinomi, nell'insieme $\{x : Q(x) \neq 0\}$;
- $f(x) = \sqrt[n]{(x)}$ in $\mathbb{R}$ se n è dispari e in $[0, +\infty[$ se n è pari;
- $f(x) = A^x$, dove $A > 0$, in $\mathbb{R}$;
- $f(x) = \log_A(x)$, dove $A > 0$ e $A \neq 1$, in $]0, +\infty[$;
- $f(x) = x^\alpha$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$, in $]0, +\infty[$;
- $f(x) = \sin(x)/\cos(x)$, in $\mathbb{R}$; $f(x) = \tan(x)$ in $\{x : \cos(x) \neq 0\}$;
- $f(x) = \arcsin(x)/\arccos(x)$ in $[-1, 1]$; $f(x) = \arctan(x)$ in $\mathbb{R}$;

e tutte le combinazioni ottenibili dalle funzioni sopra mediante somme prodotti quozienti o composizioni.