ANALISI 1 [1]
VENTITREESIMA LEZIONE
Serie di Fourier

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Serie trigonometriche

Consideriamo due successioni $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ di numeri reali e un numero $\omega > 0$.

Definizione

Chiamiamo serie trigonometrica *di frequenza angolare* ω *la serie*

$$f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \tag{1}$$

In generale si chiama polinomio trigonometrico *(di frequenza angolare* ω*) ogni somma finita del tipo*

$$P(t) := \sum_{n=0}^{\bar{n}} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\bar{n}} b_n \sin(n\omega t)$$

Quindi la serie trigonometrica è il limite dei polinomi trigonometrici quando $\bar{n} \to +\infty$. Anche in questo caso il problema sarà di trovare quando la serie converge e quale regolarità ha la funzione f così definita.

Osservazione

Se f è somma di una serie trigonometrica di frequenza angolare ω essa è periodica di periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Teorema

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$ allora la serie trigonometrica converge assolutamente per ogni t reale e la sua somma $f(t)$ data da (1) continua e T-periodica.
Inoltre per ogni funzione continua $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ogni intervallo $[a,b]$ si ha

$$\int_a^b f(t)h(t)\,dt = \sum_{n_0}^{\infty} a_n \int_a^b h(t)\cos(n\omega t) + \sum_{n_1}^{\infty} b_n \int_a^b h(t)\sin(n\omega t). \qquad (\star)$$

In particolare, prendendo $h(t) = 1$, si può "integrare per serie" su ogni intervallo $[a,b]$.

DIM- di $(\star)$

Osservazione

Dal teorema precedente si deduce che, se valgono le ipotesi e se

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

allora

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt \qquad \text{se } n \geq 1 \\ a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \end{aligned} \tag{F}$$

Definizione

Data una funzione T periodica e integrabile f chiamiamo coefficienti di Fourier di f i numeri a_n e b_n ottenuto come in (F).

Per dimostrare l'osservazione si utilizza il fatto seguente.

Osservazione

Valgono le formule seguenti per ogni $n, m \geq 1$*:*

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = 0$$

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = \delta_{n,m}\frac{T}{2}, \quad \int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = \delta_{n,m}\frac{T}{2}$$

dove $\delta_{n,m} = 0$ *se* $n \neq m$*, mentre* $\delta_{n,n} = 1$*. Se* $n = 0$ *abbiamo invece*

$$\int_0^T \sin(mt)\,dt = 0 \quad \forall m, \quad \int_0^T \cos(mt)\,dt = 0 \quad \forall m \geq 1, \quad \int_0^T \cos(0t)\,dt = T.$$

VERIFICA

DIM. della osservazione precedente

Teorema

Se $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| < +\infty$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| < +\infty$ *allora la serie trigonometrica* f *data da* (1) *è derivabile con derivate continua e* T*-periodica e vale*

$$f'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n\omega a_n \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} n\omega b_n \cos(n\omega t)$$

dove la serie scritta a destra (anch'essa trigonometrica) converge assolutamente per ogni t*.*

Più in generale se $\sum_{n=0}^{\infty} n^h|a_n| < +\infty$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} n^h|b_n| < +\infty$*, allora* f *è derivabile* h *volte e la derivata* h*-esima di* f *è la serie delle derivate, che è ancora una serie trigonometrica (ogni derivazione scambia seni e coseni e "fa uscire" un fattore* $n\omega$*). Per esempio*

$$f''(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2\omega^2 a_n \cos(n\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty} n^2\omega^2 b_n \sin(n\omega t)$$

Abbiamo visto finora il seguente percorso:

$$\text{dati } (a_n), (b_n) \quad \to \quad \text{posto } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad \to$$

$$(a_n), (b_n) \text{ sono i coeff. di Fourier di } f$$

(almeno sotto opportune ipotesi).
Come nel caso delle serie di potenze ci si può chiedere cosa succeda "partendo da f", esaminando cioè il percorso:

$$\text{data } f \quad \to \quad \text{definiti } (a_n), (b_n) \text{ come coeff. di Fourier di } f \quad \to (??)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Se questo è vero si dice che f è somma della sua *serie di Fourier*.

Teorema

Se f e g sono due funzioni continue e T periodiche aventi gli stessi coefficienti di Fourier, cioè se per ogni n intero

$$\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \int_0^T g(t)\cos(n\omega t)\,dt,$$
$$\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \int_0^T g(t)\sin(n\omega t)\,dt,$$

allora le due funzioni coincidono: $f(t) = g(t)$ per ogni t.

Nonostante questo la continuità NON è sufficiente per avere che f è somma della sua serie di Fourier – si potrebbe dimostrare che esistono funzioni continue la cui serie di Fourier non converge in nessun punto!!!
Per avere la proprietà che cerchiamo ci vuole anche la derivabilità (anche questa non è necessaria in ogni punto).

Teorema

Se f è una funzione T-periodica, se t_0 è un punto e se:

- *f è derivabile in un intorno sinistro $]t_0-\delta, t_0[$ e in un intorno destro $]t_0, t_0+\delta[$,*
- *f' è continua e limitata sia in $]t_0-\delta, t_0[$ che in $]t_0, t_0+\delta[$,*

allora esistono finiti i limiti destro e sinistro in t_0

$$f(t_0^-) := \lim_{t\to t_0^-} f(t), \qquad f(t_0^+) := \lim_{t\to t_0^+} f(t)$$

e la serie di Fourier calcolata in t_0 converge alla media tra $f(t_0^-)$ e $f(t_0^+)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t_0) = \frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2}$$

(dove a_n e b_n sono i coefficienti di Fourier di f, definiti da (F)*).*

Osservazione

Non è difficile vedere che

$$f \text{ pari } \Leftrightarrow b_n = 0\ \forall n, \qquad f \text{ dispari } \Leftrightarrow a_n = 0\ \forall n$$

DIM

Osservazione

Per la determinazione dei coefficienti di Fourier a_n e b_n, invece dell'integrale su $[0,T]$ si pu usare l'integrale su un qualunque intervallo $[a,b]$ tale che $b-a=T$, per esempio $[T/2,T/2]$.

ESEMPI