6/5/2009

AVVISI : - Data compitino 3/6/2009

ore 9.00 aule F6/F8

- Le prossime lezioni (MERC./VEN.)

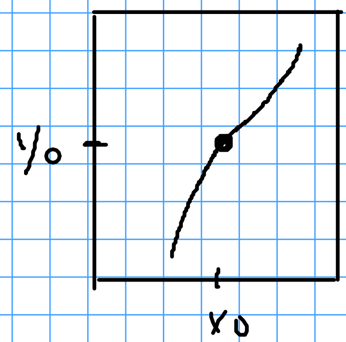
orario 14.00 - 15.30

(FINO ALLA FINE)

Eq. variabili separabili : $A: J \to \mathbb{R}$, $B: I \to \mathbb{R}$ continue

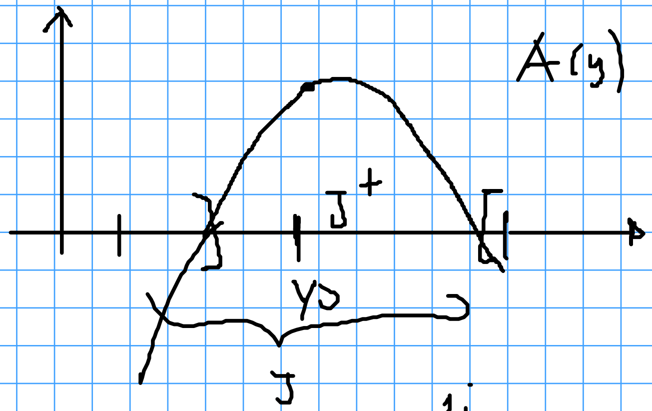
$y_0 \in J$ $\quad x_0 \in B$

$$\begin{cases} y' = A(y)\,B(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (EVS)$$



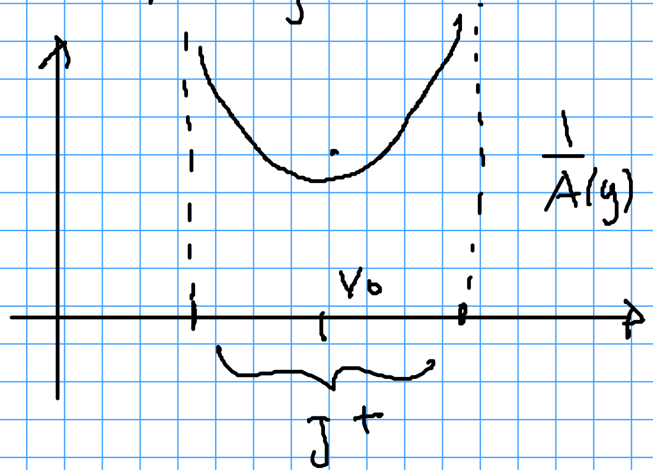
- se $A(y_0) = 0$ trovo la soluzione $y(x) = y_0 \quad \forall x$

- Supponiamo $A(y_0) > 0$



chiamo J^+ = "massimo intervallo" contenente y_0 per cui $A(y) > 0$ in J^+

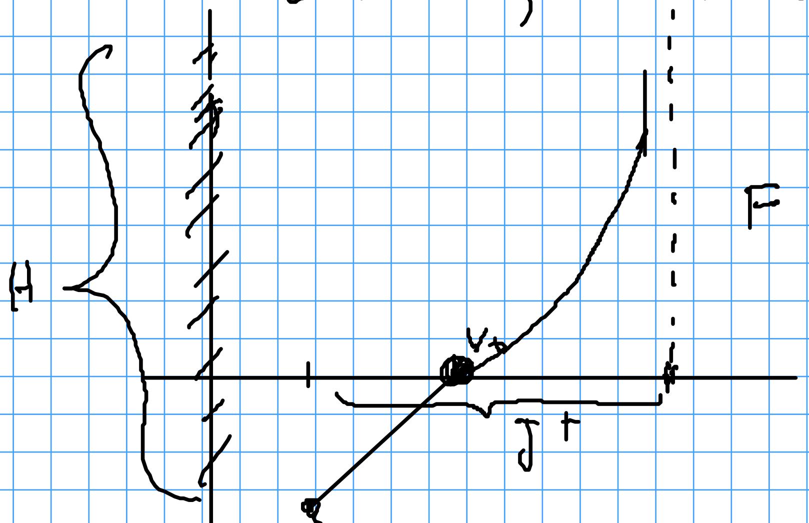
In J^+ è definita $\frac{1}{A(y)}$



Posso definire $F : J^+ \to \mathbb{R}$

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{A(\xi)}\, d\xi$$

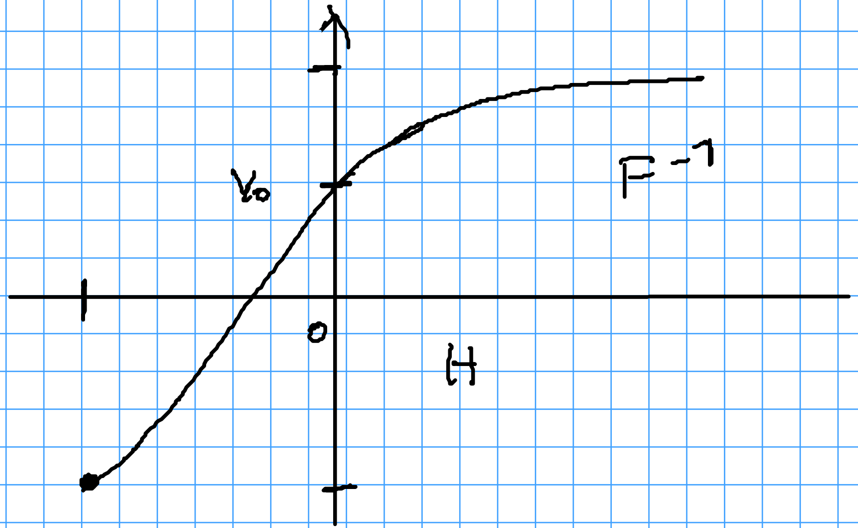
$F(y_0) = 0$, F stratt. crescente $F'(y) = \frac{1}{A(y)} > 0$



$H = F(J^+)$

H è un altro intervallo e risulta definita, $0 \in H$

$F^{-1} : H \to J^+$



$F^{-1}(0) = y_0$

F^{-1} strett crescente

Poi definisco anche $G(x) = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt$

continua, $G(x_0) = 0$

Veniamo all'eq. (E.V.S.). Supponiamo che esista una soluzione $y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to J$, $y(x_0) = y_0$

Per continuità $F(y(x))$ è vicina a zero se x vicino a x_0

è definita per x vicino a zero

è

$$\Rightarrow \frac{y'(x)}{A(y(x))} = B(x) \qquad \forall x \text{ vicino a } x_0$$

INTEGRANDO TRA x_0 e x (x vicino a x_0)

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{A(y(x))}\,dx = \int_{x_0}^{x} B(x)\,dx = G(x)$$

$\Vert$ (cambio di variabile $\xi = y(x)$)

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{A(\xi)}\,d\xi = F(y(x))$$

Riassumendo, se x vicino a x_0 ($y(x) \in J^+$ e)

$$F(y(x)) = G(x) \iff$$

$$(*) \qquad y(x) = F^{-1}(G(x))$$

HO TROVATO CHE, se esiste la sol y, e se $A(y_0)>0$

$\Rightarrow$ VALE $(*)$ per x vicino a x_0

dove $F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{A(s)}\,ds$, $G(x) = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt$

<u>VICEVERSA</u>

definiamo $y(x) = F^{-1}(G(x))$

per tutte le x tali che $G(x) \in H$

(il massimo intervallo in cui ha senso $F^{-1}(G(x))$)

$F : J^+ \to I \ni 0$ $\qquad$ $G(x_0) = 0 \in H$

$F^{-1} : H \to J^+$

$$J^+ \xrightarrow{F} H \xleftarrow{G} I$$

Tale y verifica $y(x_0) = F^{-1}(G(x_0)) = F^{-1}(0) = y_0$, e

$$y'(x) = \frac{d}{dx} F^{-1}(G(x)) = \frac{d}{dy} F^{-1}(y)\Big|_{y=G(x)} \cdot G'(x) =$$

$$\frac{1}{F'(F^{-1}(y))}\Bigg|_{y=G(x)} \cdot B(x) = A\left(F^{-1}(G(x))\right) \cdot B(x) = A(y(x))B(x)$$

quindi y verifica (E.V.S)

Esempio

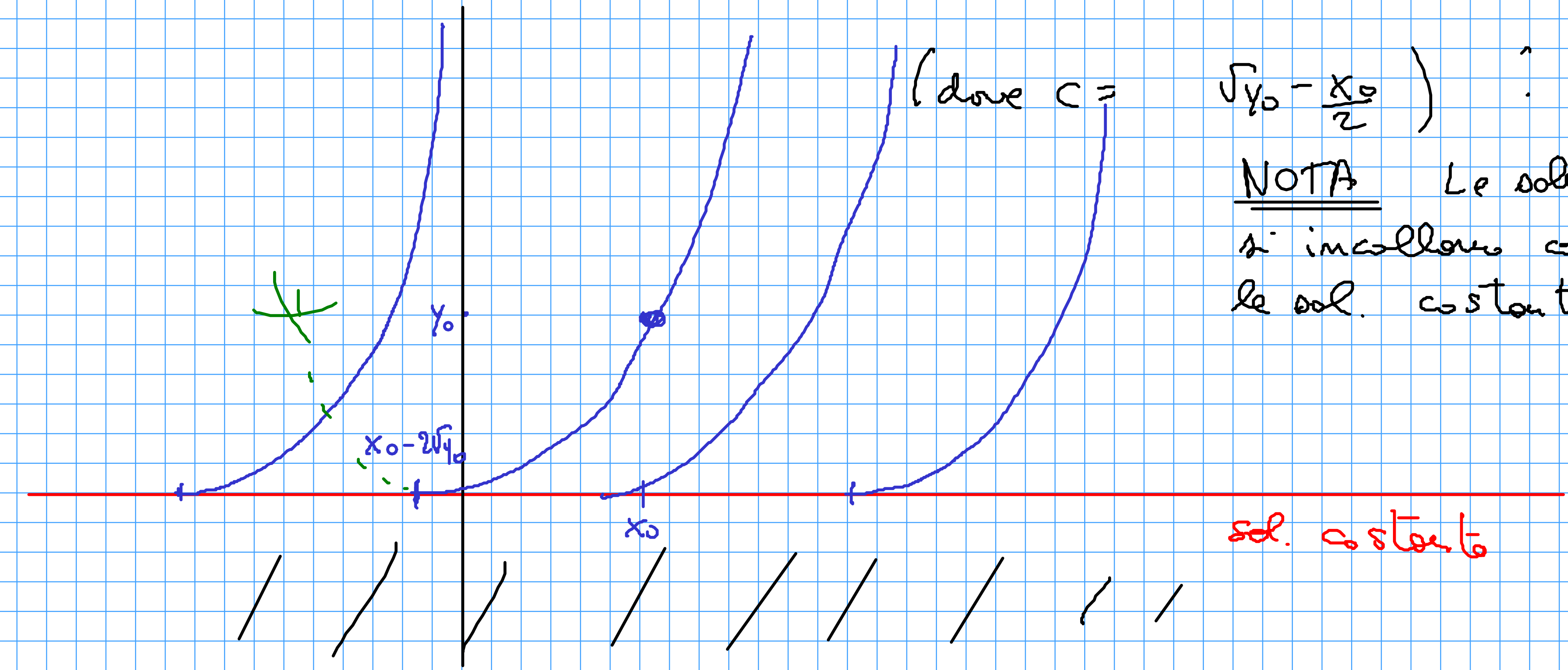
$$y' = \sqrt{y}$$

(1) sol. costanti $\quad y(x) = 0 \quad \forall x$

(2) ...

$$y(x) = \left(\sqrt{y_0} + \frac{x - x_0}{2} \right)^2 = \left(c + \frac{x}{2} \right)^2$$

(dove $c = \sqrt{y_0} - \frac{x_0}{2}$);

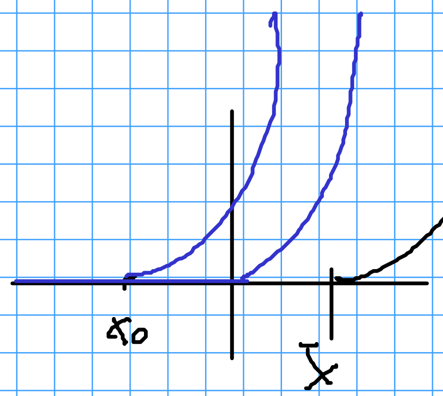


NOTA Le soluzioni si incollano con le sol. costanti

Se definisco

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < \bar{x} \\ \dfrac{(x - \bar{x})^2}{2} & \text{se } x \geq \bar{x} \end{cases}$$

tale y è soluzione (perché y è derivabile, anche in $x = \bar{x}$)



$$y' = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \bar{x} \\ x - \bar{x} & \text{se } x > \bar{x} \end{cases}$$

e quindi è derivabile anche in $\bar{x}$!!

MORALE NON C'È SOLUZIONE UNICA A PARTIRE DA $(x_0, 0)$ — CI SONO INFINITE SOLUZIONI CON $y(x_0) = 0$

QUESTO FENOMENO È COLLEGATO COL FATTO CHE $A(y) = \sqrt{y}$ NON È DERIVABILE IN $y = 0$

Altro esempio

$$y' = y^2$$

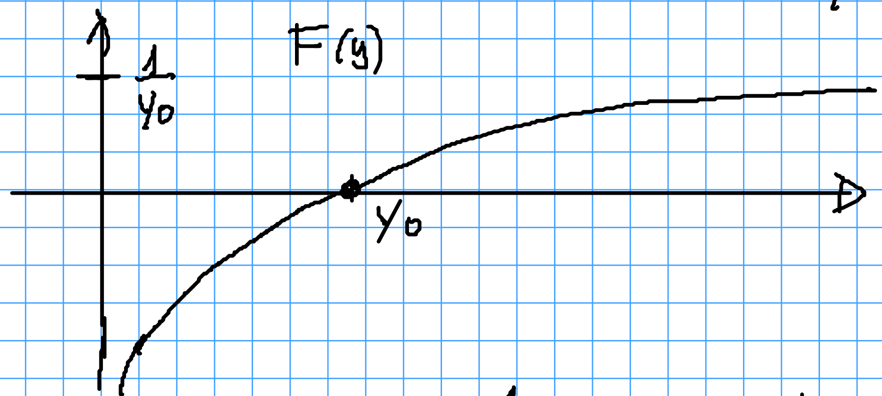
$J = \mathbb{R}$ $\qquad I = \mathbb{R}$ $\qquad A(y) = y^2$ $\qquad B(x) = 1$

(1) $y(x) = 0$ è soluzione (costante)

(2) Sol. non costanti: Fisso $x_0,\ y_0 > 0$

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\xi^2}\, d\xi = \left[-\frac{1}{\xi} \right]_{y_0}^{y} = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y}$$

$J^+ =]0, +\infty[$

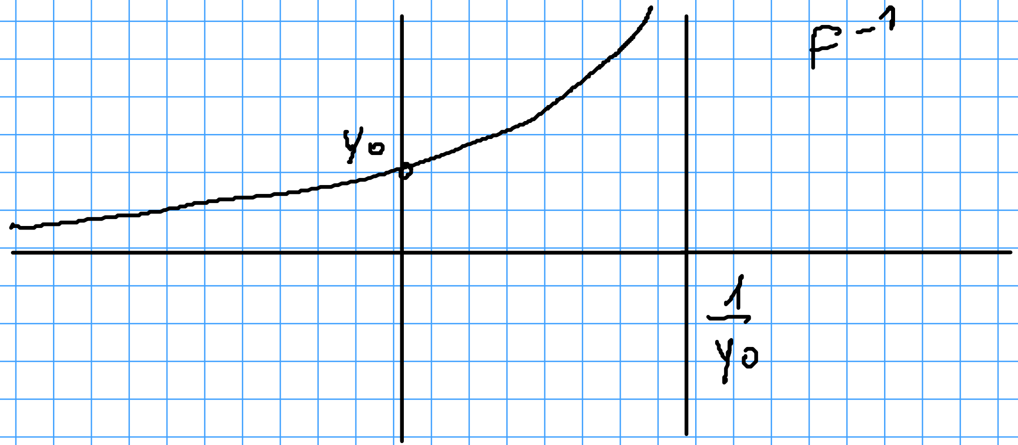


$H =]-\infty, \frac{1}{y_0}[$

$s = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y} \iff \frac{1}{y} = \frac{1}{y_0} - s$

$F^{-1} :]-\infty, \frac{1}{y_0}[$

$$F^{-1}(s) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - s} = \frac{y_0}{1 - y_0 s}$$



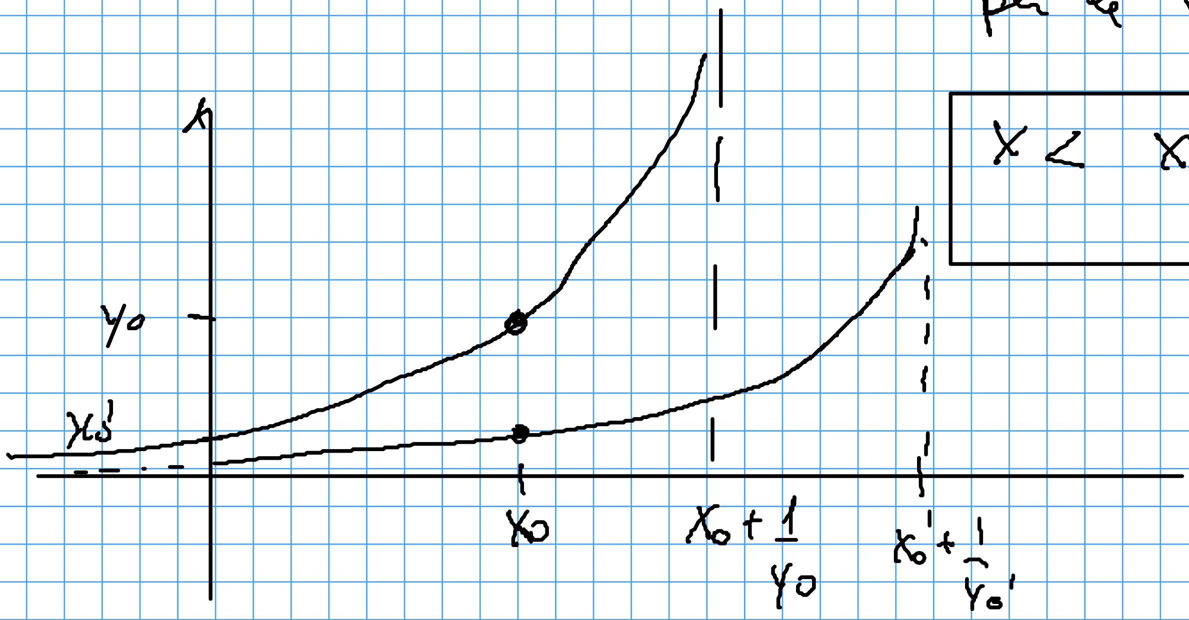
Allora

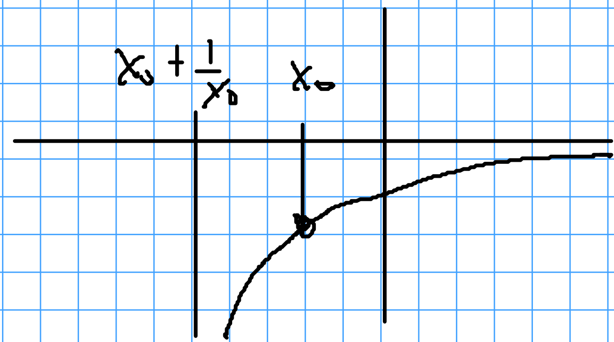
$$y(x) = F^{-1}(x - x_0) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}$$

per le x tali che $x - x_0 < \frac{1}{y_0} \iff$

$$\boxed{x < x_0 + \frac{1}{y_0}}$$

. Facendo i grafici





Se studio $y_0 < 0$ trovo (ESERCIZIO..)

la situazione $\longrightarrow$

ESEMPIO DI "ESPLOSIONE IN TEMPO FINITO"