Formule di Cesaro

December 12, 2008

Teorema 1. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Supponiamo che:*

$$\forall n \quad b_n > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty}(b_1 + \cdots + b_n) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = +\infty$$

Allora se esiste

$$l = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

necessariamente esiste

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = l.$$

Proof. Faremo la dimostrazione nel caso di l finito. Poniamo per brevità

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

quindi, per ipotesi,$B_n \to +\infty$.

Sia $\epsilon > 0$, allora per l'ipotesi esiste n_1 in $\mathbb{N}$ tale che:

$$\forall n \geq n_1 \quad l - \epsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq l + \epsilon$$

da cui moltiplicando per $b_n > 0$

$$\forall n \geq n_1 \quad (l-\epsilon)b_n \leq a_n \leq (l+\epsilon)b_n.$$

Allora se $n \geq n_1$, sommando tutte le disuguaglianze sopra da n_1 a n

$$(l-\epsilon)\sum_{k=n_1}^{n} b_k \leq \sum_{k=n_1}^{n} a_k \leq (l+\epsilon)\sum_{k=n_1}^{n} b_k.$$

Se aggiungiamo a tutti i membri $\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k$ (gli a_k mancanti):

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k + (l-\epsilon)\sum_{k=n_1}^{n} b_k \le \sum_{k=1}^{n} a_k \le (l+\epsilon)\sum_{k=n_1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n_1-1} a_k$$

che equivale a

$$\sum_{k=1}^{n_1-1}(a_k-(l-\epsilon)b_k) + (l-\epsilon)B_n \le A_n \le \sum_{k=1}^{n_1-1}(a_k-(l+\epsilon)b_k) + (l+\epsilon)B_n$$

da cui dividendo per $B_n > 0$

$$\forall n \ge n_1 \quad \frac{\sum_{k=1}^{n_1-1}(a_k-(l-\epsilon)b_k)}{B_n} + l - \epsilon \le \frac{A_n}{B_n} \le \frac{\sum_{k=1}^{n_1-1}(a_k-(l+\epsilon)b_k)}{B_n} + l + \epsilon. \quad (1)$$

Dato che $B_n \to +\infty$ si ha

$$\frac{\sum_{k=1}^{n_1-1}(a_k-(l-\epsilon)b_k)}{B_n} \to 0, \qquad \frac{\sum_{k=1}^{n_1-1}(a_k-(l+\epsilon)b_k)}{B_n} \to 0$$

per cui è possibile trovare n_2 intero tale che $n_2 \ge n_1$ e

$$\forall n \ge n_2 \quad \left|\frac{\sum_{k=1}^{n_1-1}(a_k-(l-\epsilon)b_k)}{B_n}\right| \le \epsilon, \qquad \left|\frac{\sum_{k=1}^{n_1-1}(a_k-(l+\epsilon)b_k)}{B_n}\right| \le \epsilon$$

Usando queste due disuguaglianze, ottiamo dalla (1) che:

$$\forall n \ge n_2 \quad l - 2\epsilon \le \frac{A_n}{B_n} \le l + 2\epsilon.$$

e data l'arbitrarietà di ϵ abbiamo dimostrato la tesi. $\square$

Conseguenza 1 (sulla media aritmetica)**.** *Se* $\{a_n\}$ *è una successione, e* $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *allora*

$$a_n \to l \Rightarrow \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to l$$

Proof. Basta applicare il teorema precedente con $b_n = 1$ $\square$

Teorema 2. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Supponiamo che $\{b_n\}$ sia strettamente crescente e diverga a $+\infty$:*

$$b_{n+1} > b_n, \qquad b_n \to +\infty.$$

Allora se esiste il limite

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

necessariamente si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Proof. Poniamo $a_0 = b_0 = 0$ e definiamo per $n \geq 1$

$$a'_n := a_n - a_{n-1}, \qquad b'_n := b_n - b_{n-1}.$$

Notiamo che

$$\sum_{k=1}^{n} a'_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k =$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n - a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n - a_0 = a_n$$

e analogamente

$$\sum_{k=1}^{n} b'_k = b_n$$

In particolare $b'_n > 0$ e $\sum\limits_{k=1}^{n} b'_k \to +\infty$, per le ipotesi fatte su $\{b_n\}$

Possiamo allora applicare il primo teorema alle due succesioni $\{a'_n\}$ e $\{b'_n\}$: dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a'_n}{b'_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$$

ricaviamo che

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a'_k}{\sum_{k=1}^{n} b'_k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

$\square$

Conseguenza 2. *Se $\{a_n\}$ è una successione, e $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, allora*

$$a_{n+1} - a_n \to l \Rightarrow \frac{a_n}{n} \to l$$

Proof. Basta applicare il teorema precedente con $b_n = n$ $\square$

Conseguenza 3 (sulla media geometrica)**.** *Se $\{a_n\}$ è una successione con $a_n > 0$ per ogni n , e $l \in [0, +\infty]$, allora*

$$a_n \to l \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k^1}^{n} a_k} \to l$$

Proof. Poniamo $a'_n := \ln(a_n)$; allora $a'_n \to \ln(l)$ (intendendo che $\ln(0) = -\infty$ e $\ln(+\infty) = +\infty$). Applicando la Conseguenza (1) a $\{a'_n\}$ otteniamo

$$\frac{a'_1 + \cdots + a'_n}{n} \to \ln(l) \Leftrightarrow \frac{\ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)}{n} \to \ln(l) \Leftrightarrow$$
$$\frac{\ln(a_1 \cdots a_n)}{n} \to \ln(l) \Leftrightarrow \ln(\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}) \to \ln(l) \Leftrightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \to l.$$

$\square$

Conseguenza 4. *(Cesaro "standard") Se $\{a_n\}$ è una successione con $a_n > 0$ per ogni n , e $l \in [0, +\infty]$, allora*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to l$$

Proof. Poniamo $a'_n := \ln(a_n)$; allora $a'_{n+1} - a'_n = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to \ln(l)$. Applicando la Conseguenza (2) a $\{a'_n\}$ otteniamo

$$\frac{a'_n}{n} \to \ln(l) \Leftrightarrow \frac{\ln(a_n)}{n} \to \ln(l) \Leftrightarrow \ln(\sqrt[n]{a_n}) \to \ln(l) \Leftrightarrow \sqrt[n]{a_n} \to l.$$

$\square$

Come esempio dei risultati sopra (in particolare del Teorema (2)), studiamo l'andamente della successione

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} k^\alpha = 1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha \tag{2}$$

avendo preassegnato un parametro α in $\mathbb{R}$.

Proposizione 1. *Se* $\alpha > -1$ *si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}$$

mentre, se $\alpha = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{\ln(n)} = 1$$

Proof. Supponiamo $\alpha > -1$ e per $n \geq 1$ prendiamo

$$a_n := n^{\alpha}, \qquad b_n := n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}$$

Allora

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = A_n, \qquad \sum_{k=1}^{n} b_k = n^{\alpha+1} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

Dato che (ricordandosi che $(1+x)^{\alpha+1} = 1 + (\alpha+1)x + o(x)$)

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{\frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \to \frac{1}{\alpha+1}$$

applicando il Teorema (1) si ottiene

$$\frac{A_n}{n^{\alpha+1}} \to \frac{1}{\alpha+1}$$

$\square$