Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 25 giugno 2007 - SOLUZIONI -

1. Si indichino le frasi corrette (PUNTI: 1/-1/0 per ogni domamda).

$$\text{se } a_n := \frac{n^2+\cos(\pi n)}{1+n} \quad \Rightarrow \quad (a_n) \begin{cases} \text{è limitata superiormente} & \boxed{\text{NO}} \\ \text{è limitata inferiormente} & \boxed{\text{SI}} \\ \text{ha limite} & \boxed{\text{SI}} \end{cases}$$

$$\text{se } a_n := \frac{n\cos(\pi n)-n^2}{1+n} \quad \Rightarrow \quad (a_n) \begin{cases} \text{è limitata superiormente} & \boxed{\text{SI}} \\ \text{è limitata inferiormente} & \boxed{\text{NO}} \\ \text{ha limite} & \boxed{\text{SI}} \end{cases}$$

$$\text{se } a_n := \frac{n-n^2\cos(\pi n)}{1+n} \quad \Rightarrow \quad (a_n) \begin{cases} \text{è limitata superiormente} & \boxed{\text{NO}} \\ \text{è limitata inferiormente} & \boxed{\text{NO}} \\ \text{ha limite} & \boxed{\text{NO}} \end{cases}$$

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{n^2+\cos(\pi n)}{1+n} &= \frac{n^2}{1+n}\left(1+\frac{\cos(\pi n)}{n^2}\right) \to +\infty\cdot 1 = +\infty \\ \frac{n\cos(\pi n)-n^2}{1+n} &= -\frac{n^2}{1+n}\left(1-\frac{\cos(\pi n)}{n}\right) \to -\infty\cdot 1 = -\infty \\ \frac{n-n^2\cos(\pi n)}{1+n} &= -\underbrace{\frac{n^2}{1+n}}_{b_n}\underbrace{\left(\cos(\pi n)-\frac{1}{n}\right)}_{c_n} \Rightarrow a_{2_n} \to -\infty, \quad a_{2n+1} \to +\infty \end{aligned}$$

(perché $b_n \to +\infty$ mentre $c_{2_n} \to 1$, $c_{2n+1} \to -1$). □

2. Si ha (PUNTI: 4/-1/0):

$$\max_{-3\le x\le 3} x^3-3x = 18, \qquad \min_{-3\le x\le 3} x^3-3x = -18$$

e analogamente

$$\max_{-3\le x\le 3} \frac{1}{3}x^3-x = 6, \qquad \min_{-3\le x\le 3} \frac{1}{3}x^3-x = -6$$

Svolgimento. Poniamo $f(x) := x^3-3x$. Allora $f'(x) = 3x^2-3x = 3x(x-1)$ che si annulla nei due punti ± 1. Analizzando il segno di f' si vede subito che 1 è un punto di minimo relativo e -1 è un punto di massimo relativo. Inoltre $f(1) = -2$, $f(-1) = 2$. Se calcoliamo anche i valori di f agli estremi abbiamo $f(-3) = -18$, $f(3) = 18$ e quindi il massimo e il minimo risultano assunti agli estremi. □

3. Si trovi il valore dei seguenti limiti (PUNTI: 2/-0/0 ciascuno)

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1) = \quad 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n+1}{n!}} = \quad e$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n = \quad e^{-1/3} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n = \quad +\infty$$

Svolgimento. Si ha

$$n(\sqrt[n]{e}-1) = \frac{e^{1/n}-1}{1/n} \to 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{n^n+1}{n!}} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}}_{\sqrt[n]{a_n}} \sqrt[n]{1+1/n^n} \to e\cdot 1 = e \qquad \text{perché } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$$

$$\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n = \left(1+\frac{-1}{3n+2}\right)^n = \left(1+\frac{-1}{3}\frac{1}{n+2/3}\right)^n = \left(1+\frac{-1}{3}\frac{1}{n+2/3}\right)^{n+2/3}\left(1+\frac{-1}{3}\frac{1}{n+2/3}\right)^{-2/3} \to e^{-1/3}$$

$$\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^n \to 3^{+\infty} = +\infty$$

□

4. Si calcoli il limite seguente - questo esercizio va svolto e vale 7 punti.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)e^{2x^2}-1}{\sin(x^2)\sin^2(x)} = \frac{-4}{3}$$

Svolgimento. Si ha

$$\cos(2x) = 1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24}+o(x^4) = 1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$$
$$e^{2x^2} = 1+2x^2+\frac{(2x^2)^2}{2}+o((x^2)^2) = 1+2x^2+2x^4+o(x^4)$$
$$sin(x) = x+o(x), \qquad sin(x^2) = x^2+o(x^2)$$

da cui

$$\cos(2x)e^{2x^2} = (1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4))(1+2x^2+2x^4+o(x^4)) =$$
$$1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)+2x^2-4x^4+o(x^4)+2x^4+o(x^4) = 1-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)$$

$$\sin(x^2)\sin^2(x) = (x+o(x))^2(x^2+o(x^2)) = x^2(1+o(1))^2x^2(1+o(1)) = x^4(1+o(1))(1+o(1)) = x^4(1+o(1)) = x^4+o(x^4)$$

e dunque

$$\frac{\cos(2x)e^{2x^2}-1}{\sin(x^2)\sin^2(x)} = \frac{-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} \to -\frac{4}{3}$$

□

seconda parte

5. Si trovi il carattere delle seguenti serie (PUNTI: 2/-1/0 per ciascuna).

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ NON CONVERGE

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{n^{n+1}}$ CONVERGE. NON ASSOLUTAMENT

$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n}{2+n^2}\right)\frac{n}{2+n^2}$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n+1}{n^{3n}+1}$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

Svolgimento. Si ha

$$a_n := \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n \to e^{-1/2} \Rightarrow \qquad \sum_n a_n \text{ diverge}$$

$$a_n := \frac{(-n)^n}{n^{n+1}} = \frac{(-1)^n n^n}{n^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \qquad \sum_n a_n \text{ converge per Leibniz, } \sum_n |a_n| \text{ diverge}$$

$$a_n := \sin\left(\frac{n}{2+n^2}\right)\frac{n}{2+n^2} \approx \sin\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \approx \frac{1}{n^2} \Rightarrow \qquad \sum_n a_n \text{ converge assolutamente}$$

$$a_n := \frac{n^n+1}{n^{3n}+1} \Rightarrow n^2 a_n = \frac{n^{n+2}}{n^{3n}}(1+o(1)) = \frac{1}{n^{2n-2}}(1+o(1) \to 0 \Rightarrow \qquad \sum_n a_n \text{ converge assolutamente}$$

□

6. Si indichi la risposta corretta (N.D.P=nessuna delle precedenti) (PUNTI: 4/-1/0).

$$\int_2^{+\infty} \frac{5x^2}{(x^2+4)(x^2-1)}\,dx = \frac{\pi + \ln(3)}{2}$$

Svolgimento. Si ha

$$\frac{5x^2}{(x^2+4)(x^2-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} = \frac{(Ax+B)(x^2-1) + C(x+1)(x^2+4) + D(x-1)(x^2+4)}{(x^2+4)(x^2-1)} =$$

$$\frac{(A+C+D)x^3 + (B+C-D)x^2 + (-A+4C+4D)x - B + 4C - 4D}{(x^2+4)(x^2-1)} =$$

da cui

$$\begin{cases} A \quad + C \quad + D = 0 \\ B \quad + C \quad - D = 5 \\ -A \quad + 4C \quad + 4D = 0 \\ -B \quad + 4C \quad - 4D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A & = 0 \\ C + D & = 0 \\ B + (C-D) & = 5 \\ B - 4(C-D) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A & = 0 \\ C + D & = 0 \\ C - D & = 1 \\ B & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A & = 0 \\ C & = 1/2 \\ D & = -1/2 \\ B & = 4 \end{cases}$$

e allora

$$\int_2^{+\infty} \frac{5x^2}{(x^2+4)(x^2-1)}\,dx = \int_2^{+\infty} \left(\frac{4}{x^2+4} + \frac{1/2}{x-1}.\frac{1/2}{x+1}\right)dx =$$

$$\left[2\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^{+\infty} + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\right]_2^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\ln(3) = \frac{\pi + \ln(3)}{2}$$

□

7. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (PUNTI: 4/-0/0)

$$\begin{cases} y'' + y' = A. \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, \end{cases}$$

$$y(x) = A(e^{-x} - 1 + x)$$

Svolgimento. Il polinomo caratteristico è $z^2 + z$ che ha come radici -1 e 0. Dunque le soluzioni dell'omogenea sono

$$y(x) = \gamma e^{-x} + \delta$$

Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}$. Dato che le costanti sono soluzioni dobbiamo cercare $\bar{y}$ della forma $\bar{y}(x) = Bx$. Allora, si vede subito che $B = A$ e quindi le soluzioni dell'equazione sono descritte da

$$y(x) = \gamma e^{-x} + \delta + Ax$$

□

da cui $y'(x) = -\gamma e^{-x} + A$ Imponendo le condizioni iniziali nulle si trova $\gamma + \delta = 0$ e $-\gamma + A = 0$ da cui $\gamma = A$ e $\delta = -A$.

8. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2y}{x} - 2x + 4 - \frac{4}{x} \qquad x > 0, \quad y(1) = y_0..$$

Si studino le soluzioni, trovando in particolare (8 punti in tutto - da svolgere):

- l'espressione delle soluzione con condizione iniziale $y(1) = y_0$, dato y_0 in $\mathbf{R}$;
- i limiti a 0^+ e a $+\infty$ di tale soluzione (al variare di y_0);
- i grafici relativi alle soluzioni *più significative*;
- per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 2$ ha due distinte soluzioni.

.

Svolgimento. Dalla formula risolutiva si ricava

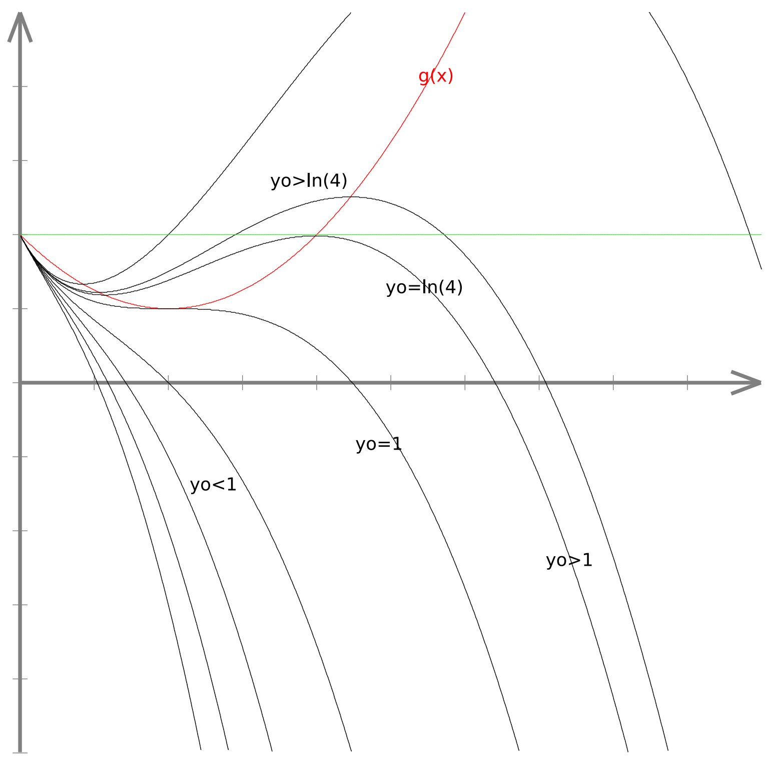
$$y(x) = x^2\left(y(1) + \int_1^x \left(-2t + 4 - \frac{4}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt\right) = x^2\left(y_0 + \int_1^x \left(-2t^{-1} + 4t^{-2} - 4t^{-3}\right)\,dt\right) =$$

$$x^2\left(y_0 + \left[-2\ln(t) - 4t^{-1} + 2t^{-2}\right]_1^x\right) = x^2\left(y_0 - 2\ln(x) - 4x^{-1} + 2x^{-2} + 2\right) = cx^2 - 2x^2\ln(x) - 4x + 2$$

dove $c = y_= + 2$. Allora (qualunque sia c)

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} x(cx - 2x\ln(x) - 4) + 2 = 2^-, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty.$$

Per studiare la monotonia di y consieriamo $F(x,y) := \frac{2y}{x} - 2x + 4 - \frac{4}{x}$, di modo che l'equazione si scrive $y'(x) = F(x, y(x))$. Allora $F(x,y) = 0$ se e solo se $y = x^2 - 2x + 2 =: g(x)$. Il grafico di g è una parabola con vertice in $(1,1)$, passante per $(0,2)$ e $(2,2)$. Tenendo conto del fatto che y cresce quando si trova nella xona sopra il grafico di g e decresce quando si trova sotto, si perviene ai grafici illustrati nella figura.



Per risolvere l'ultimo punto cerchiamo la curca che passa per $(2, 2)$. Tale curva è caratterizzata dalla condizione

$$2 = 2^2(y_0 + 2) - 2 \cdot 2^2 \ln(2) - 4 \cdot 2 + 2 \Leftrightarrow 2 = 4(y_0 + 2) - 8 \ln(2) - 8 + 2 \Leftrightarrow y_0 = 2 \ln(2) = \ln(4)$$

Quindi tale curva ha $y_0 = \ln(4)$. Come si vede dalla figura, se $y_0 > \ln(4)$ y taglia due volte la retta $y = 2$, mentre per $y_0 \leq \ln(4)$ y non la taglia mai. $\square$