Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 6 giugno 2007 - SOLUZIONI

1.

se $a_n := \dfrac{n^2}{1+n}\cos(\pi n) \quad \Rightarrow \quad (a_n)$

	sí	no
è limitata superiormente	sí	X no
è limitata inferiormente	sí	X no
ha limite	sí	X no

se $a_n := \dfrac{n^2}{1+n^2}\cos(\pi n) \quad \Rightarrow \quad (a_n)$

	sí	no
è limitata superiormente	X sí	no
è limitata inferiormente	X sí	no
ha limite	sí	X no

se $a_n := \dfrac{n}{1+n^2}\cos(n) \quad \Rightarrow \quad (a_n)$

	sí	no
è limitata superiormente	X sí	no
è limitata inferiormente	X sí	no
ha limite	X sí	no

Svolgimento. Notiamo innanzitutto che $\cos(2k\pi) = \cos(0) = 1$, mentre $\cos((2k+1)\pi) = \cos(\pi) = -1$
Se $a_n := \frac{n^2}{1+n}\cos(\pi n)$, allora $a_{2k} = \frac{4k^2}{1+2k} \to +\infty$ mentre $a_{2k+1} = -\frac{4k^2+4k+1}{3+2k} \to -\infty$. Per il primo limite (a_n) non è limitata superiormente, per il secondo (a_n) non è limitata inferiormente; dato che i due limiti non coincidono (a_n) non ha limite.
Se $a_n := \frac{n^2}{1+n^2}\cos(\pi n)$, allora $|a_n| \le \frac{n^2}{1+n^2} \le 1$ quindi (a_n) è limitata sia superiormente che inferiormente (si noti che la disuguaglianza sul modulo equivale a $-1 \le a_n \le 1$). Peraltro $a_{2k} = \frac{4k^2}{1+4k^2} \to 1$ mentre $a_{2k+1} = -\frac{4k^2+4k+1}{4k^2+4k+2} \to -1$; dato che i due limiti non coincidono (a_n) non ha limite.
Se $a_n := \frac{n}{1+n^2}\cos(n)$, allora $|a_n| \le \frac{n}{1+n^2} \to 0$ quindi $a_n \to 0$ (per i due carabinieri). Ne segue che (a_n) è limitata superiormente e inferiormente, e che (a_n) ha limite (pari a zero). $\square$

2. Se $f(x) = e^{Ax} + \tan(x)$, allora
$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{A+1}$$

Svolgimento. Si ha $f(0) = 1$ e quindi $f^{-1}(1) = 0$. Inoltre $f'(x) = Ae^{Ax} + 1 + \tan^2(x)$ da cui $f'(0) = A + 1 \neq 0$. Ne segue
$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{A+1}$$
$\square$

3. Si trovi il valore dei seguenti limiti (PUNTI: 2/-0/0 ciascuno)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!+2} = \quad +\infty \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+3} = \quad 3$$
$$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{3n+1}{2n^2+2}\right) \quad \frac{3}{2} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(n)}{n^2} \quad 0$$

Svolgimento. Ricordiamo che $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ (per Cesaro). Si ha
$$\sqrt[n]{n!+2} = \sqrt[n]{n!}(1+2/n!)^{1/n} \to +\infty \cdot 1^0 = +\infty;$$
$$\sqrt[n]{3^n+3} = 3(1+3/3^n)^{1/n} \to 3\cdot 1^0 = 3;$$
$$n\sin\left(\frac{3n+1}{2n^2+2}\right) = n\frac{3n+1}{2n^2+2}\frac{\sin\left(\frac{3n+1}{2n^2+2}\right)}{\frac{3n+1}{2n^2+2}} = \frac{3n^2+n}{2n^2+2}\frac{\sin\left(\frac{3n+1}{2n^2+2}\right)}{\frac{3n+1}{2n^2+2}} \to \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2};$$
$$\left|\frac{1-\cos(n)}{n^2}\right| \le \frac{2}{n^2} \to 0 \Rightarrow \frac{1-\cos(n)}{n^2} \to 0.$$
$\square$

4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\ln(1+Ax))e^{-Ax}-1}{x^2} = -A^2$$

Svolgimento. Usiamo gli sviluppi di Taylor al secondo ordine:

$$(1+\ln(1+Ax))e^{-Ax} = \left(1+Ax-\frac{1}{2}A^2x^2+o(x^2)\right)\left(1-Ax+\frac{1}{2}A^2x^2+o(x^2)\right) =$$
$$1+Ax-\frac{1}{2}A^2x^2+o(x^2)-Ax-A^2x^2+o(x^2)+\frac{1}{2}A^2x^2+o(x^2) = 1-A^2x^2+o(x^2)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\ln(1+Ax))e^{-Ax}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-A^2x^2+o(x^2)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-A^2x^2+o(x^2)}{x^2} = -A^2.$$

Si noti che usando gli sviluppi solo al primo ordine si sarebbe trovato

$$(1+\ln(1+Ax))e^{-Ax} = (1+Ax+o(x))\,(1-Ax+o(x)) =$$
$$1+Ax+o(x)-Ax-Ax^2-Axo(x)+o(x)+o(x)Ax+o(x)o(x) = 1+o(x)$$

(se rimane $o(x)$ i termini di ordine superiore, tra cui quelli con x^2, non sono significativi) e allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\ln(1+Ax))e^{-Ax}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+o(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x} = ????.$$

$\square$

---seconda parte---

5. Si trovi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$) converge assolutamente/ $\boxed{\text{C}}$ converge ma non assolutamente/ $\boxed{\text{NC}}$ non converge) (PUNTI: 2/-1/0 per ciascuna).

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2+n^5}\sqrt[n]{n}$	$\cancel{\text{AC}}$	C	NC	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3-n}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\cancel{\text{AC}}$	C	NC
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{1+n^2}$	AC	C	$\cancel{\text{NC}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(3^n+n^2)}{n!}$	$\cancel{\text{AC}}$	C	NC

Svolgimento. Usiamo la notazione $a_n \sim b_n$ per indicare che $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ ((a_n) è asintotica a (b_n)) e ricordiamo che se $a_n, b_n \geq 0$ (o ≤ 0) e $a_n \sim b_n$ allora le serie associate hanno lo stesso carattere (criterio del confronto asintotico). Notiamo anche che nel caso di $a_n \geq 0$ (o di $a_n \leq 0$) la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è lo stesso della convergenza assoluta di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Si ha

$$\text{se } a_n = \frac{n^3}{2+n^5}\sqrt[n]{n} \Rightarrow a_n \geq 0 \text{ e } a_n \sim \frac{n^3}{2+n^5} \sim \frac{1}{n^2} \qquad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv. ass.}$$

$$\text{se } a_n = \frac{n^2+2}{n^3-n}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \Rightarrow a_n \leq 0 \text{ e } a_n \sim \frac{n^2+2}{n^3-n}\frac{-1}{n+1} \sim -\frac{1}{n^2} \qquad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv. ass.}$$

$$\text{se } a_n = \frac{(-1)^n n^2}{1+n^2} \Rightarrow |a_n| = \frac{n^2}{1+n^2} \to 1 \Rightarrow a_n \not\to 0 \qquad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{non conv.}$$

$$\text{se } a_n = \frac{(-1)^n(3^n+n^2)}{n!} \Rightarrow |a_n| = \frac{(3^n+n^2)}{n!} \sim \frac{3^n}{n!} \qquad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{conv. ass.}$$

Nelle prime due righe si è usato il fatto che $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge (serie armonica di esponente $2 > 1$); nell'ultima il fatto che $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n/n!$ converge (cosa che si può verificare col criterio del rapporto). $\square$

6.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(A^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{A^3}\frac{\pi}{4}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(A^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{A^3}\frac{\pi}{2}.$$

Svolgimento.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(A^2+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{A^4}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+(x/A)^2)^2}\,dx = \frac{1}{A^3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y^2)^2}\,dy =$$
$$\frac{1}{A^3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy - \frac{1}{A^3}\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^2}\,dy =$$
$$\frac{1}{A^3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy - \left[\frac{y}{2A^3}\frac{-1}{1+y^2}\right]_{y=0}^{y\to+\infty} - \frac{1}{2A^3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy =$$
$$\frac{1}{2A^3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy + \left[\frac{1}{2A^3}\frac{y}{1+y^2}\right]_{y=0}^{y\to+\infty} = \left[\frac{1}{2A^3}\arctan(y)\right]_{y=0}^{y\to+\infty} + 0 = \frac{1}{2A^3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4A^3}$$

Il secondo integrale si fa nello stesso modo (e chiaramente vale il doppio del primo). □

7. Dati $f(x,y) := a + bx^2y$ e $B := \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ si ha

$$\min_{(x,y)\in B} f(x,y) = a - |b|\frac{2}{9}\sqrt{3}, \qquad \max_{(x,y)\in B} f(x,y) = a + |b|\frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

Svolgimento. Studiamo la funzione $g(x,y) := x^2y$. Allora

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,y) = 2xy, \qquad \frac{\partial}{\partial x}g(x,y) = x^2$$

da cui si deduce facilmente che i punti stazionari di g sono $(0,y)$ per qualsiasi y in $\mathbf{R}$. È immediato che in tali punti g vale zero. Cerchiamo i punti di massimo o minimo relarivo sulla frontiera di B mediante i moltiplicatori di Lagrange. Dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} 2xy &= \lambda 2x \\ x^2 &= \lambda 2y \\ x^2+y^2 &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y &= \lambda \\ x^2 &= 2y^2 \\ 3y^2 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= \lambda \\ x &= \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \\ y &= \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

(nel primo passaggio abbiamo scartato $x = 0$ già considerata). Quindi dobbiamo confrontare il valore di g in questi ulteriori quattro punti. Si trova $g\left(\frac{\pm\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ e $g\left(\frac{\pm\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$ che sono dunque, rispettivamente, il massimo e il minimo di g. Con gli stessi calcoli si tratta la f di partenza. □

8. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{3y}{x} + 1 - \frac{4}{x^2} \qquad x > 0, \quad y(1) = y_0.$$

Si studino le soluzioni, trovando in particolare:

- l'espressione delle soluzione con condizione iniziale $y(1) = y_0$, dato y_0 in $\mathbf{R}$;
- i limiti a 0^+ e a $+\infty$ di tale soluzione (al variare di y_0);
- i grafici relativi alle soluzioni *più significative*;
- per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due distinte soluzioni.

.

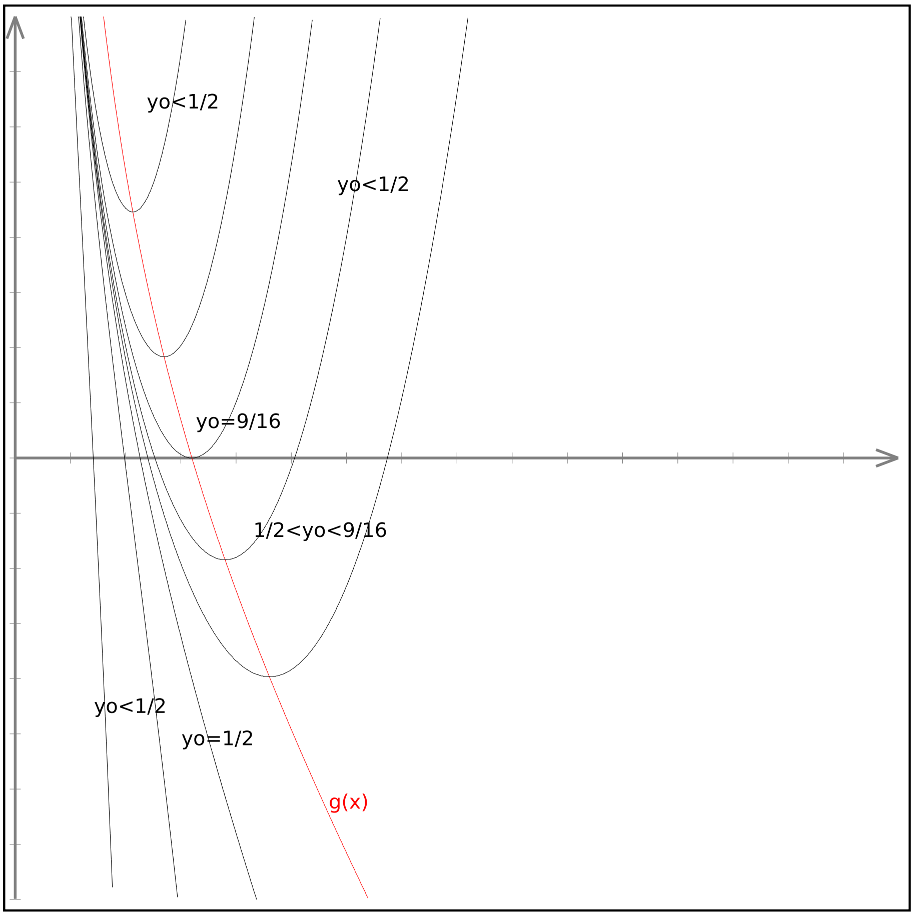
Svolgimento. Dalla formula risolutiva:

$$y(x) = x^3\left(y_0 + \int_1^x \left(1-\frac{4}{t^2}\right)\frac{1}{t^3}\,dt\right) = x^3\left(y_0 + \int_1^x \left(t^{-3}-4t^{-5}\right)\,dt\right) =$$
$$x^3\left(y_0 + \left[\frac{1}{-2}t^{-2} - \frac{4}{-4}t^{-4}\right]_{t=1}^{t=x}\right) = x^3\left(y_0 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{2} - 1\right) = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right)x^3 - \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

Facendo i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > \frac{1}{2}, \\ -\infty & \text{se } y_0 \le \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Poniamo $g(x) := \left(\frac{4}{x^2}-1\right)\frac{x}{3} = \frac{4}{3x} - \frac{x}{3}$, di modo che il grafico di g divide il piano nella zona $\{y > g(x)\}$ in cui le soluzioni crescono e nella zona $\{y < g(x)\}$ in cui le soluzioni decrescono. Tracciando il grafico di g si vede che le soluzioni devono essere disposte come nella figura.



Per rispondere all'ultimo quesito notiamo che $g(x) = 0$ se e solo se $x = 2$. Tracciamo la soluzione $\bar{y}$ tale che $\bar{y}(2) = 0$, cioè quella per cui

$$0 = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right)2^3 + \frac{1}{2} - \frac{2}{2} \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \Leftrightarrow y_0 = \frac{9}{16}.$$

È chiaro che le soluzioni che partono con $y_0 > \frac{9}{16}$ saranno sempre sopra la $\bar{y}$ e dunque non intersecheranno mai l'asse x. Invece quelle con $y_0 < \frac{9}{16}$ intersecano due volte l'asse x, *fino a quando* vanno a più infinito per $x \to +\infty$ (poi intersecano una volta sola). Dunque i valori di y_0 per cui ci sono due intersezioni sono dati da $\frac{1}{1} y_0 < \frac{9}{16}$. $\square$