Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 25 gennaio 2008

1. Se $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ è definita da $f(x) := 27x^3 - 27x^2$, allora (PUNTI: 1/-1/0 a risposta)

f ha un unico massimo relativo	$\boxed{\text{no}}$	f ha un unico minimo relativo	$\boxed{\text{si}}$
0 è massimo per f	$\boxed{\text{no}}$	2 è massimo per f	$\boxed{\text{no}}$
0 è stazionario per f	$\boxed{\text{si}}$	-2 è minimo per f	$\boxed{\text{si}}$

2. Si trovi il valore dei seguenti limiti (PUNTI: 2/-0/0 ciascuno)

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{n^5 + 5n^4} - n =$	1	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{\ln(n)} - n =$	$-\infty$
$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9^n + 1}}{2^n + n} =$	$+\infty$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^6 + 6^n} =$	6

3. Si calcoli il limite seguente - questo esercizio va svolto e vale 6 punti.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \sqrt{1 + 4x^2}) - \ln(2) - x^2}{2 - 2\cos(x) - x^2}$$

Svolgimento. Si ha:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + 4x^2} &= 1 + \frac{4x^2}{2} - \frac{(4x^2)^2}{8} + o(x^4) = 1 + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4);\\
\ln(1 + \sqrt{1 + 4x^2}) &= \ln\left(1 + 1 + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)\right) = \ln\left(2\left(1 + x^2 - x^4 + o(x^4)\right)\right) =\\
&\ln(2) + \left(x^2 - x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^2)\right)^2 + o\left(O(x^2)^2\right) =\\
&\ln(2) + x^2 - x^4 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = \ln(2) + x^2 - \frac{3x^4}{2} + o(x^4);\\
2 - 2\cos(x) - x^2 &= -\frac{x^4}{12} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Quindi considerando l'espressione da mandare al limite:

$$\frac{\ln(1 + \sqrt{1 + 4x^2}) - \ln(2) - x^2}{2 - 2\cos(x) - x^2} = \frac{\ln(2) + x^2 - \frac{3x^4}{2} + o(x^4) - \ln(2) - x^2}{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)} = \frac{-\frac{3x^4}{2} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)} \to \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{12}} = \boxed{18.}$$

□

4. Si trovi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$) converge assolutamente/ $\boxed{\text{C}}$ converge ma non assolutamente/ $\boxed{\text{NC}}$ non converge) (PUNTI: 2/-1/0 per ciascuna).

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{1 + n^2}\right)$	$\boxed{\text{AC}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{1/n} - 1\right)$	$\boxed{\text{C}}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}$	$\boxed{\text{AC}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1 + \ln(n)}$	$\boxed{\text{NC}}$

5. Siano $f(x, y) := 2x^2 - e^{y^2}$ e $A := \{(x, y) \mid x^2 - y^2 \le 1\}$. Allora (PUNTI: 3/-1/0 per quesito).

$$\max_A f = \boxed{1}, \quad \min_A f \ \boxed{\text{non esiste}}$$

Se $f(x, y) := e^{y^2} - 2x^2$ e $A := \{(x, y) \mid x^2 - y^2 \le 1\}$, allora

$$\max_A f = \boxed{\text{non esiste}}, \quad \min_A f \ \boxed{\text{-1}}$$

Se $f(x,y) := 2y^2 - e^{x^2}$ e $A := \{(x,y) \mid y^2 - x^2 \le 1\}$, allora

$$\max_A f = \boxed{1}, \quad \min_A f \ \boxed{\text{non esiste}}$$

Se $f(x,y) := e^{x^2} - 2y^2$ e $A := \{(x,y) \mid y^2 - x^2 \le 1\}$, allora

$$\max_A f = \boxed{\text{non esiste}}, \quad \min_A f \ \boxed{\text{-1}}$$

6. Si calcoli il seguente integrale (PUNTI: 4/-0/0)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}(A+x)}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{A+1}}.$$

7. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x+2} \qquad x > 0.$$

Si studino le soluzioni trovando in particolare (8 punti in tutto - da svolgere):

- l'espressione delle soluzione con condizione iniziale $y(1) = y_0$, dato y_0 in $\mathbf{R}$;
- i limiti a 0^+ e a $+\infty$ della soluzione (al variare di y_0);
- i grafici (per $x \ge 0$) relativi alle soluzioni *più significative*;
- per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha una soluzione $x > 0$.

.

Svolgimento. Applichiamo la formula risolutiva:

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(y_0 + \int_1^x \frac{t^2}{(t+2)}\,dt\right) = \frac{1}{x^2}\left(y_0 + \int_1^x \left(t - 2 + \frac{4}{t+2}\right)dt\right) = \frac{1}{x^2}\left(y_0 - \left[\frac{t^2}{2} - 2t + 4\ln(t+2)\right]_1^x\right) =$$

$$\frac{1}{x^2}\left(C + \frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(x+2)\right) = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{x} + \frac{4\ln(x+2)}{x^2}$$

dove $C = y_0 + \frac{3}{2} - 4\ln 3$.

Dalle formule scritte sopra si ricava facilmente che:

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{x}\left(\frac{C}{x} - 2 + \frac{4\ln(x+2)}{x}\right) = \frac{1}{2}^-$$

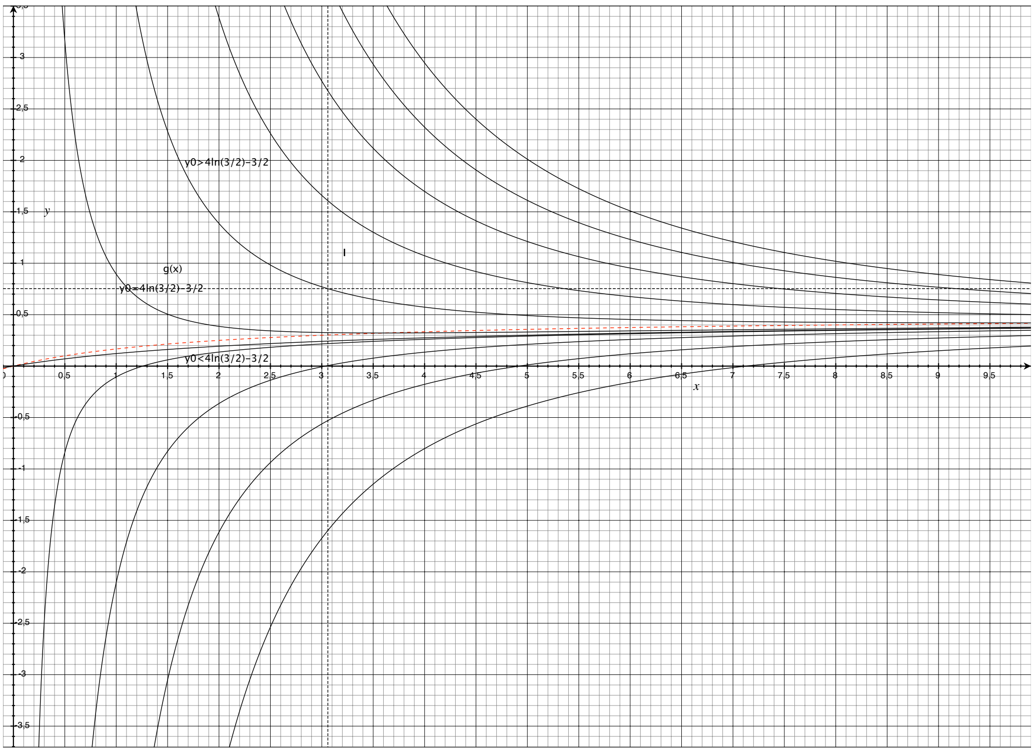
(qualunque sia C, cioé qualunque sia y_0) mentre

$$\lim_{x\to0^+} y(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2}\left(C + \frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(x+2)\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } C + 4\ln(2) > 0 \Leftrightarrow y_0 > \bar{y} \\ 0^+ & \text{se } C + 4\ln(2) = 0 \Leftrightarrow y_0 = \bar{y} \\ -\infty & \text{se } C + 4\ln(2) < 0 \Leftrightarrow y_0 < \bar{y} \end{cases}$$

dove $\bar{y} = 4\ln(3/2) - 3/2$; nel caso di mezzo il limite segue mediante Hospital:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln\left(\frac{x+2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{x - 2 + \frac{4}{x+2}}{2x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{x^2}{x+2}}{2x} = 0^+.$$

Per tracciare i grafici delle soluzioni conviene introdurre la curva g di equazione $g(x) = \frac{x}{2x+4}$; per la forma dell'equazione é chiaro che $y'(x) > 0$ se e solo se $y(x) < g(x)$, $y'(x) < 0$ se e solo se $y(x) > g(x)$ e $y'(x) = 0$ se e solo se $y(x) = g(x)$. Se tracciamo il grafico di g (vedi curva rossa tratteggiata nella figura) e teniamo conto dei limiti a 0^+ e all'infinito, troviamo i grafici delle soluzioni come rappresentati nella figura.



Dai grafici risulta chiaro che le soluzioni intersecano l'asse x in un punto positivo se e solo se tendono a meno infinito in zero, cioé se $y_0 < \frac{3}{2}$. $\square$