Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 26 maggio 2004 - A -

Cognome ______________________ Nome ______________________

1. Si dica per quali valori del parametro reale α risulta convergente il seguente integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^\alpha(1+x^4)}\,dx$$

α ______________________

2. Si calcoli il seguente integrale (4p.):

$$\int_0^1 e^{5x}\sin(3x)\,dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

3. Si calcoli il seguente integrale improprio (6p.):

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}\,dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{x}{\sqrt{25+x^2}}y - x^2 - 25$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $[0,+\infty[$ con $y(0) = y_0$ (2p.);
   (b) si calcoli, al variare di y_0, il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$(3p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più signifigativi di y_0 (4p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 la soluzione y è decrescente(2p.);
   (e) si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 5$ non ha soluzioni $x \geq 0$ (3p.).

5. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'y = 4x$$

Si disegnino i grafici delle (due) soluzioni y relative alle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y(1) = -1$ (questo comprende anche l'individuazione dell'intervallo "massimale"in cui tali soluzioni si possono definire) (6p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 26 maggio 2004 - B -

Cognome ______________________ Nome ______________________

1. Si dica per quali valori del parametro reale α risulta convergente il seguente integrale improprio (5p.):
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^\alpha(1+x^5)}\,dx$$
α ______________

2. Si calcoli il seguente integrale (4p.):
$$\int_0^1 e^{2x}\sin(5x)\,dx = \text{______________}$$

3. Si calcoli il seguente integrale improprio (6p.):
$$\int_0^{+\infty} e^{-3x}\sqrt{\frac{e^{3x}-1}{e^{3x}+1}}\,dx = \text{______________}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale
$$y' = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}y - x^2 - 16$$
   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $[0,+\infty[$ con $y(0)=y_0$ (2p.);
   (b) si calcoli, al variare di y_0, il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$(3p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (4p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 la soluzione y è decrescente(2p.);
   (e) si dica per quali y_0 l'equazione $y(x)=4$ non ha soluzioni $x \geq 0$ (3p.).

5. Si consideri l'equazione differenziale
$$y'y = 3x$$
Si disegnino i grafici delle (due) soluzioni y relative alle condizioni iniziali $y(0)=1$ e $y(1)=-1$ (questo comprende anche l'individuazione dell'intervallo "massimale" in cui tali soluzioni si possono definire) (6p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 26 maggio 2004 - C -

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

1. Si dica per quali valori del parametro reale α risulta convergente il seguente integrale improprio (5p.):
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^\alpha(1+x^6)}\, dx$$
α ____________________

2. Si calcoli il seguente integrale (4p.):
$$\int_0^1 e^{3x}\sin(4x)\, dx = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

3. Si calcoli il seguente integrale improprio (6p.):
$$\int_0^{+\infty} e^{-4x}\sqrt{\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}}\, dx = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale
$$y' = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}y - x^2 - 9$$
   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $[0,+\infty[$ con $y(0) = y_0$ (2p.);
   (b) si calcoli, al variare di y_0, il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$(3p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più signifigativi di y_0 (4p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 la soluzione y è decrescente(2p.);
   (e) si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 3$ non ha soluzioni $x \geq 0$ (3p.).

5. Si consideri l'equazione differenziale
$$y'y = 2x$$
Si disegnino i grafici delle (due) soluzioni y relative alle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y(1) = -1$ (questo comprende anche l'individuazione dell'intervallo "massimale"in cui tali soluzioni si possono definire) (6p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 26 maggio 2004 - D -

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

1. Si dica per quali valori del parametro reale α risulta convergente il seguente integrale improprio (5p.):
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^\alpha(1+x^7)}\,dx$$
α ____________________

2. Si calcoli il seguente integrale (4p.):
$$\int_0^1 e^{4x}\sin(5x)\,dx = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

3. Si calcoli il seguente integrale improprio (6p.):
$$\int_0^{+\infty} e^{-5x}\sqrt{\frac{e^{5x}-1}{e^{5x}+1}}\,dx = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale
$$y' = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}y - x^2 - 4$$
   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $[0,+\infty[$ con $y(0)=y_0$ (2p.);
   (b) si calcoli, al variare di y_0, il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$(3p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più signifigativi di y_0 (4p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 la soluzione y è decrescente(2p.);
   (e) si dica per quali y_0 l'equazione $y(x)=2$ non ha soluzioni $x \geq 0$ (3p.).

5. Si consideri l'equazione differenziale
$$y'y = 5x$$
Si disegnino i grafici delle (due) soluzioni y relative alle condizioni iniziali $y(0)=1$ e $y(1)=-1$ (questo comprende anche l'individuazione dell'intervallo "massimale"in cui tali soluzioni si possono definire) (6p.).

SOLUZIONI

1. Poniamo $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^\alpha(1+x^k)}$. Allora per $x \to 0$

$$f(x) = \frac{1 + x^4/2 + o(x^4) - 1}{x^\alpha(1+o(1)} = \frac{x^4(1/2)(1+o(1))}{x^\alpha(1+o(1)} = \frac{1}{2x^{\alpha-4}}(1+o(1))$$

Quindi in zero f è asintotica a $\dfrac{1}{2x^{\alpha-4}}$ che è integrabile vicino a zero se e solo se $\alpha - 4 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 5$.
Invece se $x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{x^2(1+o(1)) + o(1)}{x^\alpha x^k(1+o(1)} = \frac{x^2(1+o(1)}{x^{\alpha+k}(1+o(1)} = \frac{1}{x^{\alpha-2+k}}(1+o(1))$$

Quindi all'infinito f è asintotica a $\dfrac{1}{x^{\alpha-2+k}}$ che è integrabile all'infinito se e solo se $\alpha - 2 + k > 1 \Leftrightarrow \alpha > 3 - k$.
In definitiva f è integrabile su $]0, +\infty[$ se e solo se $3 - k < \alpha < 5$.

2. Si ha

$$\int_0^1 e^{ax}\sin(bx)\,dx = \left[\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx)\right]_0^1 - \frac{b}{a}\int_0^1 e^{ax}\cos(bx)\,dx =$$
$$\frac{1}{a}e^a\sin(b) - \left[\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx)\right]_0^1 - \frac{b^2}{a^2}\int_0^1 e^{ax}\cos(bx)\,dx =$$
$$\frac{1}{a}e^a\sin(b) - \frac{b}{a^2}(e^a\cos(b)-1) - \frac{b^2}{a^2}\int_0^1 e^{ax}\cos(bx)\,dx$$

e quindi

$$\int_0^1 e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{a^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a}e^a\sin(b) - \frac{b}{a^2}(e^a\cos(b)-1)\right)$$

3. Si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sqrt{\frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}}\,dx = \qquad (y = e^{ax}) \qquad = \frac{1}{a}\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^2}\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\,dy =$$
$$\left(t = \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\right) \qquad = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$$

Usando la riduzione di Hermite si trova

$$\frac{4t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{2}{1+t^2} - \frac{d}{dt}\frac{2t^2}{1+t^2}$$

da cui

$$\frac{1}{a}\int_0^1 \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{a}\left[2\arctan(t) - \frac{2t^2}{1+t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

4. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$y' + a(x)y(x) = b(x) \qquad \text{dove } a(x) = -\frac{x}{\omega^2 + x^2} \quad , \quad b(x) = -(\omega^2 + x^2)$$

Per applicare la formula risolutiva dobbiamo calcolare

$$A(x) = \int_0^x a(t)\,dt = -\int_0^x \frac{t}{\omega^2 + t^2}\,dt = -\left[\frac{1}{2}\ln(\omega^2 + t^2)\right]_0^x = -\ln\left(\frac{\sqrt{\omega^2 + x^2}}{\omega}\right)$$

e poi possiamo scrivere

$$y(x) = e^{-A(x)}\left\{y_0 + \int_0^x b(t)e^{A(t)}\,dt\right\} = \frac{\sqrt{\omega^2 + x^2}}{\omega}\left\{y_0 - \int_0^x (\omega^2 + t^2)\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + t^2}}\,dt\right\} =$$
$$\sqrt{\omega^2 + x^2}\left\{\frac{y_0}{\omega} - \int_0^x \sqrt{\omega^2 + t^2}\,dt\right\}$$

Notiamo che avremmo anche potuto prendere al posto di A una qualunque primitiva di a ottendendo $y(x) = \sqrt{\omega^2 + x^2}\left\{C - \int \sqrt{\omega^2 + x^2}\,dx\right\}$, per C opportuna calcolabile in termini di y_0. Risolvendo l'integrale si trova

$$y(x) = \sqrt{\omega^2 + x^2}\left\{\frac{y_0}{\omega} - \frac{\omega^2}{2}\text{settsinh}\left(\frac{x}{\omega}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{\omega^2 + x^2}\right\}$$

(che si può anche esprimere in termini di logaritmi). È facile vedere che, qualunque sia y_0

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty.$$

Per studialre la monotonia di y consideriamo $F(x, y) := \dfrac{xy}{\omega^2 + x^2} - (\omega^2 + x^2)$ Si vede che $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$ (se $x > 0$, mentre $F(0, y) = 0$) dove $g(x) := \dfrac{(\omega^2 + x^2)^2}{x}$.
Studiamo il grafico di g:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad , \quad g'(x) = \frac{(\omega^2 + x^2)}{x^2}(3x^2 - \omega^2)$$

(stiamo considerando, come prima, solo le $x > 0$). Se ne deduce che g ha un minimo in $\bar{x} = \omega/\sqrt{3}$, il cui valore è $\bar{y} = \dfrac{16}{9}\sqrt{3}\omega^3$. Se si cerca la soluzione y con $y(\bar{x}) = \bar{y}$ si trova il valore di $y_0 = \tilde{y} := (3 + \text{settsinh}(\omega/\sqrt{3})/2)\omega^3$. Si vede allora, esaminando i grafici, che per $y_0 \leq \tilde{y}$ la soluzione è sempre decrescente mentre per $y_0 > \tilde{y}$ la soluzione ha un tratto di crescenza (a cavallo di $\bar{x}$).
Si vede infine, sempre esaminando i grafici, che $y(x) = \omega$ non ha soluzioni se e solo se $y_0 < \omega$ (questo perché $\bar{y} > \omega$).

5. Usiamo la tecnica per risolvere le equazioni a variabili separabili: integriamo l'equazione $yy' = ax$ tra x e x_0; usando la condizione $y(x_0) = y_0$ si ottiene:

$$\int_{x_0}^x y(x)y'(x)\,dx = \int_{x_0}^x ax\,dx \Leftrightarrow \int_{y_0}^{y(x)} s\,ds = \frac{a}{2}(x^2 - x_0^2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(y(x)^2 - y_0^2) = \frac{a}{2}(x^2 - x_0^2)$$

e quindi

$$y(x) = \pm\sqrt{a(x^2 - x_0^2) + y_0^2}$$

dove il segno + o − va scelto D'ACCORDO CON IL SEGNO DI y_0 (in modo che effettivamente $y(x_0) = y_0$). Quindi con la condizione $y(0) = 1$ otteniamo

$$y(x) = \sqrt{ax^2 + 1},$$

che è definita per tutte le x, mentre la condizione $y(1) = -1$ dà

$$y(x) = -\sqrt{ax^2 + 1 - a},$$

che è definita per $x \geq \sqrt{1 - \frac{1}{a}}$.