Matematica - Ingegneria Gestionale
Compitino del 19 febbraio 2005 - Soluzioni

1.
- $\lim_{x\to 0} \frac{3x+7}{7x-3} = \frac{3\cdot 0+7}{7\cdot 0-3} = -\frac{7}{3}$;
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x+3}{3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5+3/x}{x-5/x} = \frac{5}{3}$;
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+e^{-x}}{x^2-e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{e^x}\frac{1+x^{-5}e^{-x}}{x^2e^{-x}-1} = 0^+\frac{1+0}{0-1} = 0^-$;
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-2x}{x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+1/x^2}-2}{1+3/x} = -3$; [1]
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(3x)-4}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(3x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} =$ [2] $0-0=0$;
- $\lim_{x\to+\infty} x(\sin(3/x)-e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} x\sin(3/x) - \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(3y)}{y} - 0 = 3$;
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-3^n}{2^n-n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{n^3 3^{-n}-1}{1-2^{-n}n^2} = (+\infty)(-1) = -\infty$;
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4n^3+2} = \lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n})^3 \sqrt[n]{4+2/n^3} = (1)^3 1 = 1$ [3];

2.
- Se $f(x) = \cos(\pi\sin(x))$, $f'(x) = -\sin(\pi\sin(x))\pi\cos(x)$ e dunque $f'(0) = 0$;
- se $f(x) = \tan(\pi\sin(x))$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(\pi\sin(x))}\pi\cos(x)$ e dunque $f'(0) = \pi$;
- se $f(x) = 3^{4x} = e^{4x\ln(3)}$, $f'(x) = e^{4x\ln(3)}4\ln(3)$ e dunque $f'(0) = 4\ln(3)$;
- se $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{e^x(1+x^2)-2xe^x}{(1+x^2)^2}$ e dunque $f'(0) = 1$;

3. Per $x\to+\infty$

$$xe^{-x^2} = o(\sqrt{e^{-x^2}}), \quad \sqrt{e^{-x^2}} = o(e^{-2x}), \quad e^{-2x} = o(xe^{-x}).$$

Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{e^{-x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2+x^2/2} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2/2} = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{e^{-x^2}}}{e^{-2x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2/2+2x} = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x}}{xe^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0.$$

Dunque l'ordine corretto, dall'infinitesimo di ordine più basso a quello di ordine più alto, è

$$xe^{-x}, \qquad e^{-2x}, \qquad \sqrt{e^{-x^2}}, \qquad xe^{-x^2}.$$

[1] ATTENZIONE: se $x<0$ $\sqrt{x^2+1} = -x\sqrt{1+1/x^2}$.

[2] Dato che $\sin(3x)$ è limitata (tra -1 e 1) e che $\frac{1}{x}\to 0$ per $x\to+\infty$ il loro prodotto tende a zero per $x\to+\infty$.

[3] Se $a_n\to l$ con $l\in]0,+\infty[$, allora $\sqrt[n]{a_n}\to 1$

4. Usando gli sviluppi notevoli:

$$\sqrt{\cos(2x)}e^{2x^2} = \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^{1/2} (1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)) =$$

$$\left[1 + \frac{1}{2}\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{8}\left(-2x^2 + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(O(x^2)\right)^2\right)\right] (1+2x^2+2x^4+o(x^4)) =$$

$$(1 - x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4))(1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)) = 1 + x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$$

e quindi

$$P_4(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{6}x^4$$

5. Sia $f(x) := \sqrt{3x^2 - 12} - 2x$. Allora

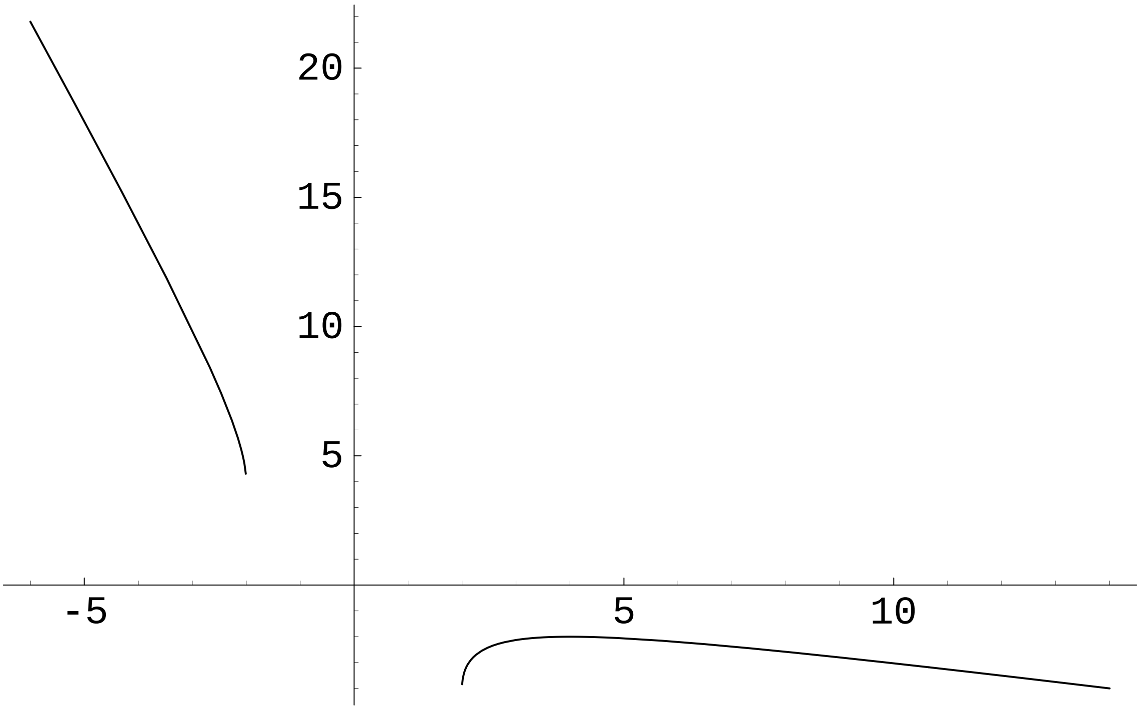
- Il dominio di f è dato dalle x in cui $3x^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0$ e cioè $x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$
- I limiti vanno quindi cercati per $x \to \pm\infty$, $x \to -2^-$ e $x \to 2^+$:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2 - 12} - 2x = \lim_{x\to-\infty} x(-\sqrt{3 - 12/x^2} - 2) = -\infty(-\sqrt{3} - 2) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2 - 12} - 2x = \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{3 - 12/x^2} - 2) = +\infty(\sqrt{3} - 2) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-2^-} \sqrt{3x^2 - 12} - 2x = 4, \qquad \lim_{x\to 2^+} \sqrt{3x^2 - 12} - 2x = -4.$$

- Il segno si può trovare studiando la disequazione irrazionale associata, ma può anche essere trovato dopo, mediante la monotonia.
- Calcolando la derivata: $f'(x) = \dfrac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 12}} - 2 = \dfrac{3x - 2\sqrt{3x^2 - 12}}{\sqrt{3x^2 - 12}}$. Vediamo dove $f'(x) \geq 0$:

$$3x - 2\sqrt{3x^2 - 12} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 9x^2 \geq 4(3x^2 - 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 48 \geq 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4.$$

  Dunque f decresce per $x \leq -2$ e per $x \geq 4$ mentre cresce su $[2, 4]$; in particolare $x = 4$ è punto di massimo relativo e il corrispondente massimo relativo è $f(4) = -2$. Inoltre il punto $x = -2$ è di minimo locale (anche se in quel punto la derivata non si annulla) corrispondente al minimo locale $f(-2) = 4$.
- Dalle informazioni raccolte si ricava il grafico seguente (in particolare il segno di f è positivo su $]-\infty, -2]$ mentre è negativo su $[2, +\infty[$):



- Dal grafico si vede che la retta $y = t$ taglia il grafico di f in due punti distinti se e solo se $-4 \le t < -2$