Comlementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 18 settembre 2006 SOLUZIONI

PRIMA PARTE (per tutti)

1. Si consideri la successione di funzioni definita da $f_n(t) := \dfrac{x^{n+1} - 2x^n}{2^n}$ per $x \in [0, 2]$.

   Si ha $f_n(x) = (x-2)\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$. Se $x \in [0, 2]$ è chiaro che $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \to 0$ e dunque la successione di funzioni tende puntualmente a zero. Si noti che $f_n \leq 0$ su $[0, 2]$ e $f_n(0) = f_n(2) = 0$; cerchiamo il minimo di f_n su $[0, 2]$ (il massimo è ovviamente zero). Abbiamo:

$$f_n'(x) = \frac{n+1}{2^n}x^n - \frac{2n}{2^n}x^{n-1} = ((n+1)x - 2n)\,\frac{x^{n-1}}{2^n}$$

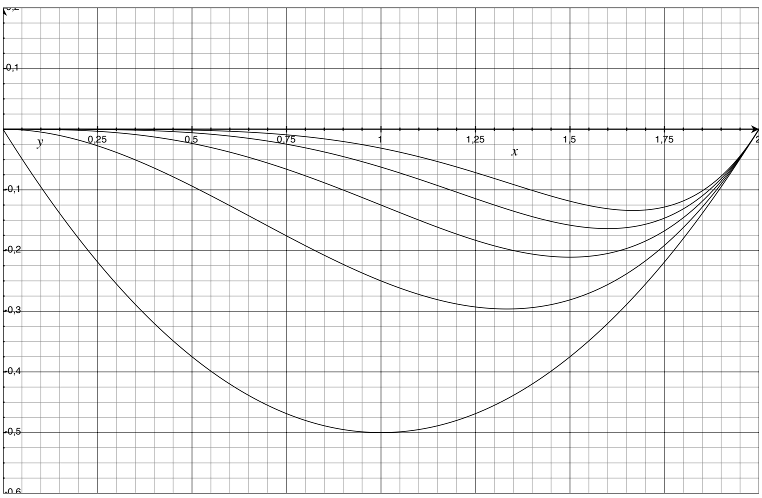
   e quindi il minimo si trova nel punto $\bar{x}_n := \dfrac{2n}{n+1}$. È chiaro che $\bar{x}_n \in [1, 2]$ e $\bar{x}_n \to 2$. Il minimo assoluto di f_n su $[0, 2]$ è allora $f_n(\bar{x}_n) = (\bar{x}_n - 2)\left(\dfrac{\bar{x}_n}{2}\right)^n = -\dfrac{2}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
   Dato che $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to \dfrac{1}{e}$ si deduce che

$$\|f_n\|_{\infty,[0,2]} = |f_n(\bar{x}_n)| = \frac{2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 0$$

   e dunque f_n tende uniformemente a zero su tutto $[0, 2]$. In particolare tende uniformemente a zero sia in $[0, 1]$ che in $[1, 2]$. Se si volesse trattare a parte l'intervallo $[0, 1]$ si troverrebbe (dato che f_n' non si annulla mai in $[0, 1]$)

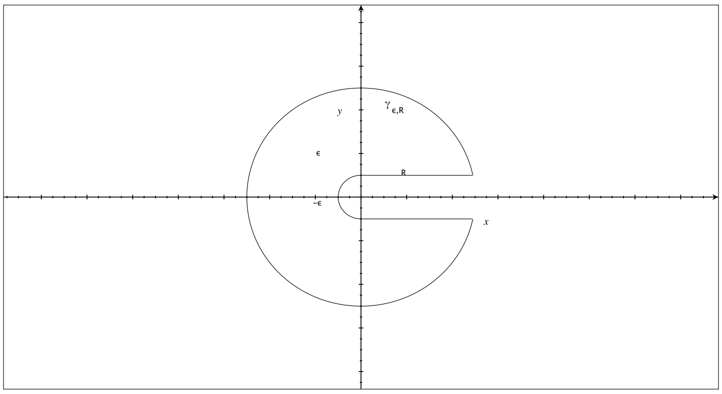
$$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = |f_n(1)| = \frac{1}{2^n} \to 0$$

   riottenendo lo stesso risultato.
   I grafici per alcune f_n ($n?1, 2, 3, 4, 5$) sono riportati nells figura seguente.



2. Si calcoli $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^4 + 16}\,dx$

   Per fare l'integrale proposto conviene considerare il cammino $\gamma_{\epsilon,R}$ della figura che segue e integrarci sopra la funzione $f(z) = \dfrac{\sqrt{z}}{(16+z^4)}$, utilizzando la determinazione della radice: $\sqrt{\rho e^{i\theta}} := \sqrt{\rho} e^{\frac{i\theta}{2}}$ per $0 < \theta < 2\pi$ (dunque tale determinazione è olomorfa sull'insieme dei complessi privato della semiretta dei reali positivi).



Mandando ϵ a zero ed R all'infinito si deduce che

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(16+x^4)}\,dx = 2\pi i \sum_{\text{tutti i poli}} Resf = 2\pi i \sum_{k=1,2,3,4} \left.\frac{\sqrt{z}}{4z^3}\right|_{z=z_k}$$

dove z_k sono le radici quarte di -16, cioè $z_1 = 2e^{\frac{1}{4}\pi i}$, $z_1 = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$, $z_1 = 2e^{\frac{5}{4}\pi i}$ e $z_1 = 2e^{\frac{7}{4}\pi i}$. Dunque

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(16+x^4)}\,dx = 2\pi i \frac{\sqrt{2}}{4\cdot 8}\left(e^{\frac{1}{8}\pi i}e^{-\frac{3}{4}\pi i} + e^{\frac{3}{8}\pi i}e^{-\frac{9}{4}\pi i} + e^{\frac{5}{8}\pi i}e^{-\frac{15}{4}\pi i} + e^{\frac{7}{8}\pi i}e^{-\frac{21}{4}\pi i}\right) =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{16}\pi i\left(e^{-\frac{5}{8}\pi i} + e^{-\frac{15}{8}\pi i} + e^{-\frac{25}{8}\pi i} + e^{-\frac{35}{8}\pi i}\right) =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{16}\pi i\left(e^{-\frac{10}{8}\pi i}\left(e^{\frac{5}{8}\pi i} + e^{-\frac{5}{8}\pi i}\right) + e^{-\frac{30}{8}\pi i}\left(e^{\frac{5}{8}\pi i} + e^{-\frac{5}{8}\pi i}\right)\right) =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{8}\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)\pi i\left(e^{-\frac{10}{8}\pi i} + e^{-\frac{30}{8}\pi i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)\pi i\left(e^{-\frac{10}{8}\pi i} + e^{-\frac{14}{8}\pi i}\right) =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{8}\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)\pi i e^{-\frac{12}{8}\pi i}\left(e^{\frac{2}{8}\pi i} + e^{-\frac{2}{8}\pi i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)\pi i e^{-\frac{3}{2}\pi i}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)\pi i\cdot i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)\pi = \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

e dunque l'integrale fa $\dfrac{\pi}{8}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

3. Si consideri il problema (dipendente dal parametro α in $\mathbf{R}$):

$$\begin{cases} y'' + 9y = t^2 - \alpha t & \text{se } t \in]0,\pi[\\ y(0) = 0 = y(\pi). \end{cases}$$

Si dica per quali α esiste una soluzione y, se l'eventuale soluzione è unica e si esprima ogni possibile soluzione mediante una serie di Fourier (opportuna).

Prima di tutto troviamo lo sviluppo in serie di Fourier di soli seni della funzione $b(t) := t^2 - \alpha t$: $b(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt)$. Si ha

$$\int_0^\pi t^2 \sin(kt)\,dt = \left[\frac{t^2\cos(kt)}{-k}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{2t\cos(kt)}{k}\,dt =$$
$$-\frac{\pi^2}{k}\cos(k\pi) + \left[\frac{2t\sin(kt)}{k^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2\sin(kt)}{k^2}\,dt =$$
$$-\frac{\pi^2}{k}(-1)^k + 0 - \left[\frac{2\cos(kt)}{-k^3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{k}(-1)^{k+1} + \frac{2}{k^3}((-1)^k - 1)$$

mentre

$$\int_0^\pi t\sin(kt)\,dt = \left[\frac{t\cos(kt)}{-k}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(kt)}{k}\,dt = -\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) + \left[\frac{\sin(kt)}{k^2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{k}(-1)^{k+1}$$

e quindi

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi b(t)\sin(kt)\,dt = \frac{2(\pi-\alpha)}{k}(-1)^{k+1} + \frac{4}{\pi k^3}((-1)^k - 1)$$

Se scriviamo anche l'eventauale soluzione y mediante $y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin(kt)$ e usiamo l'equazione troviamo, per ogni k

$$(-k^2 + 9)y_k = b_k$$

e quindi $b_3 = 0$, che impone la condizione

$$0 = \frac{2(\pi-\alpha)}{3} - 2\frac{4}{\pi 27} \Leftrightarrow \alpha = \pi - \frac{4}{9\pi} =: \bar{\alpha}$$

Dunque se $\alpha \neq \bar{\alpha}$ l'equazione non ha soluzione, mentre se $\alpha = \bar{\alpha}$ le soluzioni esistono e sono della forma

$$y(t) = \sum_{k\neq 3} \frac{b_k}{9-k^2}\sin(kt) + \gamma\sin(3t) \qquad \gamma \in \mathbf{R}$$

dove i b_k sono quelli scritti sopra.

4. Si trovi la soluzione del problema: (se esiste)

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = e^{-|t|} \\ y \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

Usiamo la trasformata di Fourier (in L^2). Se $b(t) := e^{-|t|}$, allora

$$\hat{b}(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{-(-1+i\omega)t}\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\omega)t}\,dt = \frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{-1-i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

e dunque dall'equazione

$$(-\omega^2 + 2i\omega + 2)\hat{y}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Si vede facilmente che

$$-\omega^2 + 2i\omega + 2 = \Leftrightarrow \omega = i \pm 1$$

e dunque possiamo scrivere

$$\hat{y}(\omega) = \frac{2}{(1+\omega^2)(-\omega^2+2i\omega+2)} = -\frac{2}{(\omega+i)(\omega-i)(\omega-1-i)(\omega+1-i)}$$

(la frazione scritta è in L^2 perche il denominatore non si annulla per nessun ω reale e va all'infinito come ω^4). Allora

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \begin{cases} i\sum\limits_{w=i,i\pm 1} Res\left(\frac{2e^{i\omega t}}{(\omega^2+1)(-\omega^2+2i\omega+2)}, w\right) & \text{se } t \geq 0, \\ -iRes\left(\frac{2e^{i\omega t}}{(\omega^2+1)(-\omega^2+2i\omega+2)}, -i\right) & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Calcoliamo i residui (poniamo $f(z) := \frac{2e^{i\omega t}}{(\omega^2+1)(-\omega^2+2i\omega+2)}$):

$$\begin{aligned}
Res(f,i) &= \left.\frac{-2e^{i\omega t}}{(\omega+i)(\omega+1-i)(\omega-1-i)}\right|_{\omega=i} &=&\quad \frac{e^{-t}}{i}\\
Res(f,-i) &= \left.\frac{-2e^{i\omega t}}{(\omega-i)(\omega+1-i)(\omega-1-i)}\right|_{\omega=-i} &=&\quad \frac{-e^{t}}{5i}\\
Res(f,1+i) &= \left.\frac{-2e^{i\omega t}}{(\omega+i)(\omega-i)(\omega+1-i)}\right|_{\omega=1+i} &=&\quad \frac{-e^{(i-1)t}}{(2i+1)}\\
Res(f,-1+i) &= \left.\frac{-2e^{i\omega t}}{(\omega+i)(\omega-i)(\omega-1-i)}\right|_{\omega=-1+i} &=&\quad \frac{e^{(-i-1)t}}{(1-2i)}.
\end{aligned}$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}
&\frac{-e^{(i-1)t}}{(1+2i)} + \frac{e^{(-i-1)t}}{(1-2i)} = -e^{-t}\left(\frac{e^{it}}{1+2i} - \frac{e^{-it}}{1-2i}\right) = \\
&-2ie^{-t}\Im m\left(\frac{e^{it}}{1+2i}\right) = -2ie^{-t}\left(\frac{-2\cos(t)+\sin(t)}{5}\right)
\end{aligned}$$

e quindi

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t} + 2e^{-t}\left(\dfrac{-2\cos(t)+\sin(t)}{5}\right) & \text{se } t \geq 0 \\ \dfrac{e^t}{5} & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

5. Si trovi la soluzione del problema:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Ragionando come nell'ultimo esercizio della prima parte:

$$(-\omega^2 + 2i\omega + 2)\hat{y} = \hat{\delta} = 1$$

da cui

$$\hat{y} = \frac{1}{-\omega^2+2i\omega+2} = \frac{-1}{(\omega-1-i)(\omega+1-1)}$$

Dato che la funzione sopra è in L^2 possiamo antitrasformarla col solito metodo:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = \begin{cases} i \sum\limits_{w=i\pm 1} Res\left(\frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2+2i\omega+2}, w\right) & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Calcoliamo i residui (poniamo $f(z) := \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2+2i\omega+2}$):

$$\begin{aligned} Res(f, 1+i) &= \left.\frac{-e^{i\omega t}}{\omega+1-i}\right|_{\omega=1+i} = & \frac{-e^{(i-1)t}}{2} \\ Res(f, -1+i) &= \left.\frac{-e^{i\omega t}}{\omega-1-i}\right|_{\omega=-1+i} = & \frac{-e^{(-i-1)t}}{-2}. \end{aligned}$$

e quindi

$$y(t) = H(t) e^{-t} i \frac{-e^{it} + e^{-it}}{2} = H(t) e^{-t} \sin(t)$$