Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
SOLUZIONI della prova scritta del 17 settembre 2007

PRIMA PARTE (per tutti)

(a.1) Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) := \dfrac{x}{8+n^3x^3}$.

1. Si dica, motivando, se la successione converge uniformemente su $[0,+\infty[$;
2. Si trovi l'insieme delle x in $[0,+\infty[$ per cui la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ risulta convergente. Chiamiamo I tale insieme e indichiamo con $f(x)$ tale serie (cioè poniamo $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ per x in I).
3. Si dica, motivando, per quali x in I la f (oltre a esistere) risulta continua.

Svolgimento. Prima di tutto calcoliamo il massimo di ogni f_n su $[0,+\infty[$. Si ha

$$f_n'(x) = \frac{8+n^3x^3 - x\,3n^3x^2}{(8+n^3x^3)^2} = \frac{8-2n^3x^3}{(8+n^3x^3)^2}$$

Quindi $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow n^3x^3 = 4 \Leftrightarrow x = x_n := \sqrt[3]{4}/n$ e $\|f_n\|_\infty = \max_{x\geq 0}|f_n(x)| = f_n(x_n) = x_n/12 = \sqrt[3]{4}/12n \to 0$. Ne segue che f_n tende uniformemente a zero su $[0,+\infty[$.

Si vede peraltro che $\sum_n \|f_n\| = +\infty$ e quindi **non si può dedurre** che la serie converge uniformemente su $[0,+\infty[$.

Se però fissiamo un qualunque $a > 0$, dato che definitivamente $x_n < a$ si deduce che (per n grande) $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \max_{x\geq a}|f_n(x)| = f_n(a) = \dfrac{a}{8+n^3a^3} \leq \dfrac{1}{3a^2n^3}$. Dato che $\sum_n \dfrac{1}{n^3} < +\infty$ si deduce che $\sum_n f_n$ converge uniformemente su $[a,+\infty[$ e quindi la f risulta essere una funzione continua su $[a,+\infty[$. Dato che $a > 0$ è arbitrario f è continua su $]0,+\infty[$.

D'altra parte la serie converge anche in zero (e quindi $I = 0,+\infty[)$ e $f(0) = 0$. Però f non è continua in zero. Per vederlo osserviamo che

$$f(1/n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/n}{8+k^3/n^3} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8+(k/n)^3} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{8+1} = \frac{1}{9}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{9}.$$

Questo impedisce che $f(1/n)$ tenda a $0 = f(0)$. □

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^3-4x^2+5x}\,dx.$$

Svolgimento. Usiamo il metodo dei residui. La funzione $f(z) := \dfrac{e^{2iz}}{z^3-4z^2+5z}$ ha tre poli semplici in $z_1 = 0$ e $z_{23} = 2 \pm i$. Allora $\mathrm{Res}(f, z_j) = \left.\dfrac{e^{2iz}}{3z^2 - 8z + 5}\right|_{z=z_j} = \dfrac{1}{6z_j}$. Quindi

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{5},\\
&\mathrm{Res}(f, 2+i) = \frac{e^{4i-2}}{3(2+i)^2 - 8(2+i) + 5)} = \frac{e^{-2}(\cos(4) + i\sin(4))}{3(3+4i) - 8(2+i) + 5)} = \\
&\quad \frac{e^{-2}(\cos(4) + i\sin(4))}{-2+4i} = \frac{e^{-2}(-1-2i)(\cos(4) + i\sin(4))}{10} = \\
&\quad \frac{e^{-2}[(-\cos(4) + 2\sin(4)) - i(2\cos(4) + \sin(4))]}{10}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(v.p) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \pi i \mathrm{Res}(f,0) + 2\pi i \mathrm{Res}(f, 2+i) = \\
&\frac{\pi i}{5} + \frac{\pi i e^{-2}}{5}[(-\cos(4) + 2\sin(4)) - i(2\cos(4) + \sin(4))]
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^3 - 4x^2 + 5x}\,dx = \Im m\,(v.p) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{5e^2}\left(e^2 - \cos(4) + 2\sin(4)\right).
$$

□

(b.1) Sia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ definita da

$$
f(t) := \begin{cases} t(\pi - t) & \text{se } t \geq 0 \\ t(\pi + t) & \text{se } t \leq 0 \end{cases}
$$

Si trovino i λ in $\mathbf{R}$ per cui il problema differenziale ai limiti

$$
\begin{cases} y'' + \lambda y = f(t) \\ y(-\pi) = y(\pi) = 0 \end{cases}
$$

ha soluzioni (su $[-\pi, \pi]$).

Svolgimento. Dato che si cercano soluzioni nulle agli estremi di $[-\pi, \pi]$ cercheremo tali soluzioni some somma di una serie di Fourier di soli seni, cioè del tipo $y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin(k(t-\pi)/2)$ (attenzione siamo sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ - dobbiamo "translare indietro"le funzioni $\sin(t/2)$ che andrebbero bene per $[0, 2\pi]$). Prima di tutto sviluppiamo il dato f in questo modo: se vogliamo $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k(t-\pi)/2)$ risulterà

$$
f_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(k(t-\pi)/2)\,dt.
$$

Notiamo che f è dispari. Se $k = 2h$ pari:

$$f_{2h} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(h(t-\pi))\,dt = \frac{\cos(-h\pi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(ht))\,dt = \text{ (l'integrando è pari)}$$

$$\frac{2(-1)^h}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(ht))\,dt = \underbrace{\frac{2(-1)^h}{\pi}\left[\frac{f(t)(-\cos(ht))}{h}\right]_{t=0}^{t=\pi}}_{=0} + \frac{2(-1)^h}{h\pi}\int_0^{\pi} f'(t)\cos(ht))\,dt =$$

$$\underbrace{\frac{2(-1)^h}{h\pi}\left[\frac{f'(t)\sin(ht)}{h}\right]_{t=0}^{t=\pi}}_{=0} - \frac{2(-1)^h}{h^2\pi}\int_0^{\pi} f''(t)\sin(ht)\,dt =$$

$$\frac{4(-1)^h}{h^2\pi}\int_0^{\pi}\sin(ht)\,dt = \frac{4(-1)^h}{h^2\pi}\left[\frac{-\cos(ht)}{h}\right]_0^{\pi} = \frac{4(-1)^h}{h^3\pi}(1-(-1)^h) = 4\frac{(-1)^h-1}{h^3\pi};$$

mentre per i $k = 2h+1$ dispari:

$$f_{2h+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin((h+1/2)(t-\pi)))\,dt =$$
$$-\frac{\sin((h+1/2)\pi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos((h+1/2)t))\,dt = 0 \text{ (l'integrando è dispari).}$$

In definitiva (gli unici k che sopravvivono sono $k = 4j+2$ $j = 0,1,\dots$) e si ha:

$$f(t) = -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{8}{(2j+1)^3}\sin\left((2j+1)(t-\pi)\right)$$

Se ora cerchiamo la soluzione $y = \sum_k y_k \sin((k/2)(t-\pi))$ troviamo

$$y'' = -\sum_k (k/2)^2 y_k \sin(k/2(t-\pi))$$

Ne ricaviamo le condizioni $(\lambda-(k/2)^2)y_k = f_k$ per ogni k. Tali condizioni sono soddisfatte da $y_k = 0$ per tutti i i k dispari e i k multipli di 4, qualunque sia λ. Rimangono i k della forma $k = 2h$ con h dispari, in cui la condizione diventa $(\lambda - h^2)y_{2h} = -\frac{8}{\pi h^3}$. Per poter verificare tale condizione è necessario e sufficiente che $\lambda \neq h^2$. Dunque i λ per cui c'è almeno una soluzione sono tutti i numeri reali che non sono quadrati di un intero dispari. □

(b.2) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 4y = \cos(t)e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}.$$

Svolgimento. Conviene considerare il problema

$$\begin{cases} v'' - 4v = e^{it}e^{-|t|} \\ v \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}.$$

In questo modo alla fine $y(t) := \Re e\, v(t)$ sarà la soluzione del problema iniziale. Si ha:

$$\left(a(t) = e^{-|t|} \;\Rightarrow\; \hat{a}(\omega) = \frac{2}{\omega^2 - 1}\right) \Longrightarrow \left(b(t) = e^{it}e^{-|t|} \;\Rightarrow\; \hat{b}(\omega) = \frac{2}{(\omega-1)^2 - 1}\right)$$

Applicando la trasformata di Fourier a entrambi i membri dell'equazione in v:

$$(-\omega^2 - 4)\hat{v}(\omega) = \frac{2}{(\omega-1)^2-1} \Leftrightarrow \hat{v}(\omega) = .\frac{-2}{(\omega^2+4)((\omega-1)^2-1)}$$

Poniamo $f(\omega) := \dfrac{-2e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)((\omega-1)^2-1)}$ per ricavare $y(t)$ dobbiamo calcolare i residui della funzione olomorfa f nei suoi poli, cioè in $\pm 2i$ e $1 \pm i$ (tutti semplici). Si ha:

$$\mathrm{Res}(f, 2i) = \left[\frac{-2e^{i\omega t}}{2\omega((\omega-1)^2+1) + (\omega^2+4)2(\omega-1)}\right]_{\omega=2i} = \frac{-2e^{-2t}}{4i((2i-1)^2+1)} = \frac{ie^{-2t}}{2(-2-4i)} = \frac{ie^{-2t}}{4(-1-2i)} = \frac{i(-1+2i)e^{-2t}}{20}$$

$$\mathrm{Res}(f, -2i) = \left[\frac{-2e^{i\omega t}}{2\omega((\omega-1)^2+1) + (\omega^2+4)2(\omega-1)}\right]_{\omega=-2i} = \frac{-2e^{2t}}{-4i((-2i-1)^2+1)} = \frac{-ie^{-2t}}{2(-2+4i)} = \frac{-ie^{-2t}}{4(-1+2i)} = \frac{-i(-1-2i)e^{-2t}}{20}$$

$$\mathrm{Res}(f, 1+i) = \left[\frac{-2e^{i\omega t}}{2\omega((\omega-1)^2+1) + (\omega^2+4)2(\omega-1)}\right]_{\omega=1+i} = \frac{-2e^{(i-1)t}}{((1+i)^2+4)2i} = \frac{ie^{(i-1)t}}{4+2i} = \frac{i(2-i)e^{(i-1)t}}{10} = \frac{i[(2\cos(t)+\sin(t)) + i(-\cos(t)+2\sin(t))]e^{-t}}{10}$$

$$\mathrm{Res}(f, 1-i) = \left[\frac{-2e^{i\omega t}}{2\omega((\omega-1)^2+1) + (\omega^2+4)2(\omega-1)}\right]_{\omega=1-i} = \frac{-2e^{(i+1)t}}{((1-i)^2+4)(-2i)} = \frac{-ie^{(i+1)t}}{4-2i} = \frac{-i(2+i)e^{(i+1)t}}{10} = \frac{-i[(2\cos(t)-\sin(t)) + i(\cos(t)+2\sin(t))]e^{t}}{10}$$

Ne segue che per $t > 0$

$$v(t) = i(\mathrm{Res}(f,2i) + \mathrm{Res}(f, i+1) = \frac{(1-2i)e^{-2t}}{20} + \frac{-[(2\cos(t)+\sin(t)) + i(-\cos(t)+2\sin(t))]e^{-t}}{10}$$

mentre per $t < 0$:

$$v(t) = -i(\mathrm{Res}(f,-2i) + \mathrm{Res}(f, -i+1) = \frac{(1+2i)e^{-2t}}{20} + \frac{-[(2\cos(t)-\sin(t)) + i(\cos(t)+2\sin(t))]e^{t}}{10}$$

per cui prendendo la parte reale

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2t}}{20} - \dfrac{(2\cos(t)+\sin(t))e^{-t}}{10} & \text{se } t \geq 0 \\[2ex] \dfrac{e^{2t}}{20} - \dfrac{(2\cos(t)-\sin(t))e^{t}}{10} & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

$\square$

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

(c.1) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = \delta' \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Fourier ai termini dell'equazione:

$$(-\omega^2 - 4i\omega + 5)\hat{y}(\omega) = i\omega \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{i\omega}{-\omega^2 - 4i\omega + 5}$$

dato che il denominatore $-\omega^2 - 4i\omega + 5$ non si annulla mai per ω reale. In effetti $-\omega^2 - 4i\omega + 5 = 0$ se e solo se $\omega = -2i \pm 1 \notin \mathbf{R}$. Dunque la trasformata si trova in L^2 e possiamo antitraformare mediante i residui della funzione $f(z) := \dfrac{ize^{izt}}{-z^2 - 4iz + 5}$ nei due poli semplici $-2i \pm 1$ (entrambi con parte immaginaria negativa). Dunque $y(t) = 0$ per $t > 0$ mentre per $t < 0$

$$\begin{aligned} y(t) = -i\left(\operatorname{Res}(f, 1-2i) + \operatorname{Res}(f, -1-2i)\right) &= \\ -i\left(\left[\frac{ize^{itz}}{-2z - 4i}\right]_{z=1-2i} + \left[\frac{ize^{itz}}{-2z - 4i}\right]_{z=-1-2i}\right) &= \\ -i\left(\frac{i(1-2i)e^{(i+2)t}}{-2} + \frac{i(-1-2i)e^{(-i+2)t}}{2}\right) = \left(\frac{(-1+2i)e^{it}}{2} + \frac{(-1-2i)e^{-it}}{2}\right)e^{2t} &= \\ \Re e\left((-1+2i)e^{it}\right)e^{2t} = (-\cos(t) - 2\sin(t))e^{2t} \end{aligned}$$

Si può anche scrivere $y(t) = -H(-t)(\cos(t) + 2\sin(t))e^{2t}$. Verifichiamo che y è effettivamente una soluzione:

$$\begin{aligned} y(t) =& -H(-t)(\cos(t) + 2\sin(t))e^{2t}; \\ y'(t) =& \delta(-t)(\cos(t) + 2\sin(t))e^{2t} - H(-t)(-\sin(t) + 2\cos(t))e^{2t} - H(-t)(\cos(t) + 2\sin(t))2e^{2t} = \\ & \delta(t)(\cos(t) + 2\sin(t))e^{2t} - H(-t)(3\sin(t) + 4\cos(t))e^{2t} = \\ & \delta(t) - H(-t)(3\sin(t) + 4\cos(t))e^{2t}; \\ y''(t) =& \delta'(t) + \delta(-t)(3\sin(t) + 4\cos(t))e^{2t} - H(-t)(3\cos(t) - 4\sin(t))e^{2t} \\ & - H(-t)(3\sin(t) + 4\cos(t))2e^{2t} = \\ & \delta'(t) + \delta(t)(3\sin(t) + 4\cos(t))e^{2t} - H(-t)(11\cos(t) + 2\sin(t))e^{2t} = \\ & \delta'(t) + 4\delta(t) - H(-t)(11\cos(t) + 2\sin(t))e^{2t}; \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 5y = \delta'(t) + 4\delta(t) - H(-t)(11\cos(t) + 2\sin(t))e^{2t} \\ - 4\delta(t) + H(-t)(12\sin(t) + 16\cos(t))e^{2t} - H(-t)(5\cos(t) + 10\sin(t))e^{2t} = \delta'(t) \end{aligned}$$

□

(c.2) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = \delta' \\ y(t) = 0 \qquad \text{per } t < 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace a entrambi i termini dell'equazione. Si ha:

$$(z^2 - 4z + 5)\check{y}(z) = z \Leftrightarrow \check{y}(z) = \frac{z}{z^2 - 4z + 5}$$

Per antitrasformare utilizziamo i residui di $f(z) := \dfrac{ze^{zt}}{z^2 - 4z + 5}$ che ha due poli semplici in $2 \pm i$. Si ha, per $t > 0$:

$$\begin{aligned} y(t) = \mathrm{Res}(f, 2+i) + \mathrm{Res}(f, 2-i) = \left[\frac{ze^{zt}}{2z-4}\right]_{z=2+i} + \left[\frac{ze^{zt}}{2z-4}\right]_{z=2-i} = \\ \frac{(2+i)e^{(2+i)t}}{2i} + \frac{(2-i)e^{(2-i)t}}{-2i} = \left(\frac{(2+i)e^{it} - (2-i)2^{-it}}{2i}\right) e^{2t} = \\ \Im m \left((2+i)e^{it}\right) e^{2t} = (\cos(t) + 2\sin(t))e^{2t} \end{aligned}$$

mentre $y(t) = 0$ per $t < 0$. Dunque si può scrivere $y(t) = H(t)(\cos(t) + 2\sin(t))e^{2t}$. □

(c.3) Si trovi la soluzione del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Poniamo $v(t) = H(t)y(t)$. Allora $v'(t) = \delta(t)y(t) + H(t)y'(t) = \delta(t)y(0) + H(t)y'(t) = H(t)y'(t)$, mentre $v''(t) = \delta(t)y'(t) + H(t)y''(t) = \delta(t)y'(0) + H(t)y''(t) = \delta(t) + H(t)y''(t)$. Dunque v verifica:

$$\begin{cases} v'' - 4v' + 5v = \delta + H \\ v(t) = 0 \qquad \text{per } t < 0. \end{cases}$$

Cerchiamo v applicando la trasformata di Laplace:

$$(z^2 - 4z + 5)\check{v}(z) = 1 + \frac{1}{z} = \frac{1+z}{z} \Leftrightarrow \check{v}(z) = \frac{1+z}{z(z^2 - 4z + 5)}$$

Posto $f(z) := \dfrac{(1+z)e^{zt}}{z(z^2 - 4z + 5)}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f, 0) &= \left[\frac{(1+z)e^{zt}}{(z^2 - 4z + 5)}\right]_{z=0} = \frac{1}{5} \\ \mathrm{Res}(f, 2+i) &= \left[\frac{(1+z)e^{zt}}{z(z-2+i)}\right]_{z=2+i} = \frac{(3+i)}{(2+i)2i} e^{(2+i)t} = -\frac{1+7i}{10} e^{(2+i)t} \\ \mathrm{Res}(f, 2-i) &= \overline{\mathrm{Res}(f, 2+i)} = -\frac{1-7i}{10} e^{(2-i)t} \end{aligned}$$

e quindi, per $t > 0$:

$$v(t) = \frac{1}{5} - e^{2t} 2\Re e \left(\frac{1+7i}{10} e^{it}\right) = \frac{1}{5} - \frac{\cos(t) - 7\sin(t)}{5} e^{2t}$$

da cui $y(y) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{\cos(t) - 7\sin(t)}{5} e^{2t}$ per ogni t in $\mathbf{R}$ □