Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 14 luglio 2008

PRIMA PARTE (per tutti)

(a.1) Si consideri la successione di funzioni $f_n : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definite da $f_n(x) := e^{-\frac{\sqrt{1+n^2}}{x}}$ con la convenzione $f_n(0) = 0$.

1. Si studino la convergenza puntuale e uniforme di f_n su $[0, +\infty[$;
2. Si trovi l'insieme delle x in $[0, +\infty[$ per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ risulta convergente. Chiamiamo I tale insieme e poniamo $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ per x in I.
3. Si dica, motivando, per quali x in I la f (oltre a esistere) risulta continua.

Svolgimento. Dato che $f_n(0) = 0$ e che, se $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\sqrt{1+n^2}}{x}} = 0$$

la successione tende puntualmente a zero. D'altra parte si vede facilmente che

$$f'_n(x) = \frac{\sqrt{1+n^2}}{x^2} e^{-\frac{\sqrt{1+n^2}}{x}} > 0 \quad \forall x > 0; \qquad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{\sqrt{1+n^2}}{x}} = 1,$$

da cui

$$\forall n \quad \|f_n - 0\|_{\infty,\mathbf{R}} = \sup_{x\geq 0} f_n(x) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_{\infty,\mathbf{R}} = 1 \neq 0$$

e quindi f_n non converge uniformemente a zero (dunque non converge uniformemente). D'altra parte dalla crescenza di f_n segue che, fissato un qualunque $M > 0$

$$\|f_n\|_{\infty,[0,M]} = \max_{0\leq x\leq M} f_n(x) = f_n(M) = e^{-\frac{\sqrt{1+n^2}}{M}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(in particolare $f_n \to 0$ uniformemente su ogni $[0, M]$). Se poi passiamo alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[0,M]} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{1+n^2}}{M}} < +\infty$$

(per le note proprietà dell'esponenziale). Allora la serie converge uniformemente su $[0, M]$ per cui la sua somma f è continua su $[0, M]$. Dato che M può essere preso ad arbitrio la somma $f(x)$ esiste per ogni $x \geq 0$ ed f è continua su tutto $[0, +\infty[$. $\square$

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(5x)}{(x^2 - 2x + 2)^2} \, dx.$$

Svolgimento. Calcoliamo l'integrale complesso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{5ix}}{(x^2 - 2x + 2)^2} \, dx = (*).$$

Questo integrale si può trovare usando i residui: dato che il denominatore ha le due radici $z_{12} = 1 \pm i$ con molteplicità due si ha:

$$(*) = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{5iz}}{(z^2-2z+2)^2}, 1+i\right) = 2\pi i\left[\frac{d}{dz}\frac{e^{5iz}}{(z-1+i)^2}\right]_{1+i} =$$
$$2\pi i\left[\frac{5ie^{5iz}}{(z-1+i)^2} - 2\frac{e^{5iz}}{(z-1+i)^3}\right]_{1+i} = 2\pi i\left(\frac{5ie^{5i-5}}{(2i)^2} - 2\frac{e^{5i-5}}{(2i)^3}\right) =$$
$$2\pi\left(\frac{5e^{5i-5}}{4} - 2\frac{e^{5i-5}}{-8}\right) = 3\pi e^{5i-5}$$

Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(5x)}{(x^2-2x+2)^2}\, dx. = \Re e(*) = 3\pi e^{-5}\cos(5).$$

□

(b.1) Si trovi lo sviluppo in serie di Fourier in soli seni della funzione $f(t) = \pi - |2x - \pi|$, definita nell'intervallo $[0, \pi]$. Si dica poi se la serie così trovata converge uniformemente a f e se la serie delle derivate converge uniformemente a f'.

Svolgimento. Si ha $\omega = \dfrac{\pi}{\pi} = 1$ e quindi $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nt)$, dove (integrando per parti)

$$\frac{\pi}{2}u_n = \int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt = \left[f(t)\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} f'(t)\cos(nt)\, dt =$$
$$0 + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(nt)\, dt - \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos(nt)\, dt = \frac{1}{n}\left[2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\left[2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$
$$\frac{2}{n^2}\left(\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \Leftrightarrow u_n = \frac{8}{\pi n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi n^2} < +\infty$, la serie converge uniformemente. Dato che la funzione f non è derivabile nel punto $x = \frac{\pi}{2}$ la serie delle derivate non può convergere uniformemente (e in effetti non vale la condizione sufficiente $\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n| < +\infty$). □

(b.2) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 10y = \mathrm{sgn}(t)e^{-3|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}.$$

Svolgimento. Calcoliamo la trasformata di Fourier di $b(t) = \mathrm{sgn}(t)e^{-3|t|}$:

$$\hat{b}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t)e^{-i\omega t}\, dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{(3-i\omega)t}\, dt + \int_0^{+\infty} e^{(-3-i\omega)t}\, dt =$$
$$-\left[\frac{e^{(3-i\omega)t}}{3-i\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-3-i\omega)t}}{-3-i\omega}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{3-i\omega} + \frac{-1}{-3-i\omega} = -\frac{1}{3-i\omega} + \frac{1}{3+i\omega} = \frac{-2i\omega}{9+\omega^2}$$

Applichiamo la trasformata di Fourier all'equazione:

$$(-\omega^2 - 6i\omega + 10)\hat{y}(\omega) = \hat{b}(\omega) \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{2i\omega}{(9+\omega^2)(\omega^2+6i\omega-10)}.$$

Il denominatore ha 4 radici semplici $\pm 3i$ e $-3i \pm 1$. Per calcolare $y(t)$ ci servono i residui di $g(z) := \dfrac{2ize^{izt}}{(9+z^2)(z^2+6iz-10)}$ nelle radici del denominatore. Si ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g,3i) &= \left[\frac{2ize^{izt}}{2z(z^2+6iz-10)+(9+z^2)(2z+6i)}\right]_{z=3i} &&= -\frac{ie^{-3t}}{37};\\
\operatorname{Res}(g,-3i) &= \left[\frac{2ize^{izt}}{2z(z^2+6iz-10)+(9+z^2)(2z+6i)}\right]_{z=-3i} &&= -ie^{3t};\\
\operatorname{Res}(g,-3i+1) &= \left[\frac{2ize^{izt}}{2z(z^2+6iz-10)+(9+z^2)(2z+6i)}\right]_{z=-3i+1} &&= \frac{-3+19i}{37}e^{(3+i)t};\\
\operatorname{Res}(g,-3i-1) &= \left[\frac{2ize^{izt}}{2z(z^2+6iz-10)+(9+z^2)(2z+6i)}\right]_{z=-3i-1} &&= \frac{3+19i}{37}e^{(3-i)t}.
\end{aligned}$$

Allora

$$y(t) = \begin{cases} i\operatorname{Res}(g,3i) = \dfrac{e^{-3t}}{37} & \text{se } t > 0,\\ -i\left(\operatorname{Res}(g,-3i)\operatorname{Res}(g,-3i+1)\operatorname{Res}(g,-3i-1)\right) = & \\ -e^{3t} + e^{3t}\left(\dfrac{3i+19}{37}e^{it} + \dfrac{-3i+19}{37}e^{-it}\right) = & \\ -e^{3t} + 2e^{3t}\left(\dfrac{19\cos(t) - 3\sin(t)}{37}\right) & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

□

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

(c.1) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 10y = \delta'' \\ y \in \mathcal{S}'. \end{cases}$$

Svolgimento. Si ha $\widehat{\delta''}(\omega) = (i\omega)^2 = -\omega^2$. Dunque, trasformando l'equazione secondo Fourier:

$$(-\omega^2 - 6i\omega + 10)\hat{y}(\omega) = -\omega^2 \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + 6i\omega - 10} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = 1 + \frac{-6i\omega + 10}{\omega^2 + 6i\omega - 10}.$$

L'antitrasformata di 1 è δ, mentre per antitrasformare l'altro pezzo utilizziamo il metodo dei residui. Posto $g(z) = \dfrac{(-6iz+10)e^{izt}}{z^2+6iz-10}$, abbiamo due poli semplici in $-3i \pm 1$. Allora

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g,-3i+1) &= \left[\frac{(-6iz+10)e^{izt}}{2z+6i}\right]_{z=-3i+1} &&= (-4-3i)e^{3t+it}\\
\operatorname{Res}(g,-3i-1) &= \left[\frac{(-6iz+10)e^{izt}}{2z+6i}\right]_{z=-3i-1} &&= (4-3i)e^{3t-it}
\end{aligned}$$

e quindi per

$$\begin{aligned}
y(t) =& \delta + H(-t)(-i)\left(\operatorname{Res}(g,-3i+1) + \operatorname{Res}(g,-3i-1)\right) = \\
& \delta + H(-t)\left((4i-3)e^{3t+it} + (-4i-3)e^{3t-it}\right) = \delta - H(-t)2e^{3t}(3\cos(t) + 4\sin(t))
\end{aligned}$$

□

(c.2) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 10y = \delta'' \\ y(t) = 0 \qquad \text{per } t < 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione

$$(z^2 - 6z + 10)\check{y}(z) = z^2 \Leftrightarrow \check{y}(z) = \frac{z^2}{z^2 - 6z + 10} \Leftrightarrow \check{y}(z) = 1 + \frac{6z - 10}{z^2 - 6z + 10}$$

Antitraformiamo il secondo termine mediante i residui. Posto $g(z) = \dfrac{(6z-10)e^{zt}}{z^2 - 6z + 10}$, allora g ha due poli semplici in $z = 3 \pm i$ e si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g, 3+i) &= \left[\frac{(6z-10)e^{zt}}{2z-6}\right]_{z=3+i} = (3-4i)e^{(3+i)t} \\ \operatorname{Res}(g, 3-i) &= \left[\frac{(6z-10)e^{zt}}{2z-6}\right]_{z=3-i} = (3+4i)e^{(3+i)t} \end{aligned}$$

da cui l'antitrasformata è

$$\begin{aligned} y_1(t) = H(t)(\operatorname{Res}(g, 3+i) + \operatorname{Res}(g, 3-i)) = 2H(t)\Re e \left((3-4i)e^{(3+i)t}\right) = \\ 2H(t)e^{3t}(3\cos(t) + 4\sin(t)) \end{aligned}$$

Da tutto questo segue che

$$y(t) = \delta + y_1(t) = \delta + 2H(t)e^{3t}(3\cos(t) + 4\sin(t)).$$

□

(c.3) Si trovi la trasformata di Fourier, nel senso delle distribuzioni, della funzione u definita da

$$u(t) := \begin{cases} t^2 & \text{se } t \geq 0, \\ -t^2 & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

(si può dare per buono che u è una distribuzione temperata, cioè che $u \in \mathcal{S}'$).

Svolgimento. Si ha $u(t) = t^2 \operatorname{sgn}(t)$. Dato che $\widehat{\operatorname{sgn}}(\omega) = \dfrac{-2i}{\omega}$, applicando le proprietà della trasformata di Fourier:

$$\hat{u}(\omega) = -\frac{d^2}{d\omega^2}\frac{-2i}{\omega} = \frac{4i}{\omega^3}.$$

□