Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta intermedia del 16 novembre 2007
SOLUZIONI

1. Si consideri la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) := \sqrt{x}e^{-nx}.$$

   (a) Si dimostri che (f_n) converge uniformemente a zero su $[0, +\infty[$.

   (b) Si consideri

   $$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

   e si dimostri che $F(x)$ è ben definita, continua e derivabile su $]0, +\infty[$.

   (c) (facoltativo) Si provi che

   $$\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty.$$

Svolgimento. Ogni f_n è definita su tutto $[0, +\infty[$ e si ha

$$f_n(0) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Inoltre, per ogni $x > 0$

$$f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-nx} - n\sqrt{x}e^{-nx} = \frac{e^{-nx}}{2\sqrt{x}}(1 - 2nx).$$

Da questo segue

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2n} =: x_n$$

e si vede facilmente che f_n cresce tra 0 e x_n mentre decresce dopo x_n; dunque x_n è un punto di massimo. Il corrispondente massimo vale $f(x_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2en}}$. Allora

$$\|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \frac{1}{\sqrt{2en}} \to 0$$

e quindi $f_n \to 0$ uniformemente su $[0, +\infty[$.
Fissiamo $a > 0$, Ragionando come al punto precedente si vede che quando $\frac{1}{2n} \leq a$ (cioè per $n \geq \frac{1}{2a}$) il massimo di f_n su $[a, +\infty[$ si realizza in $x = a$. Dunque

$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a) = \sqrt{a}e^{-na}.$$

È peraltro chiaro che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a}e^{-na} < +\infty$$

e quindi la serie in esame converge uniformente su $[a, +\infty[$, da cui la sua somma F è una funzione continua su $[a, +\infty[$. Per studiare la derivabilità di F calcoliamo f_n'':

$$f_n''(x) = e^{-nx}\left(-\frac{1}{4}x^{-3/2} - \frac{n}{2}x^{-1/2} - \frac{n}{2}x^{-1/2} + n^2x^{1/2}\right) = \frac{e^{-nx}}{4\sqrt{x^3}}\left(-1 - nx + 4n^2x^2\right).$$

Tale derivata si annulla nei punti $x_{n,1} := \dfrac{1-\sqrt{17}}{8n} < 0$ e $x_{n,2} := \dfrac{1+\sqrt{17}}{8n} > 0$. Si vede anche che f_n'' è positiva tra $x_{n,1}$ e $x_{n,2}$ mentre è negativa dopo $x_{n,2}$. Dunque f_n' ha un punto di minimo in $x = x_{n,2}$, di valore $f_n'(x_{n,2}) < 0$; inoltre $f_n'(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Allora per n grande (in modo che $x_{n,2} < a$) si ha che $f_n'(a) \leq f_n'(x) < 0$ per tutte le $x \geq a$ e dunque

$$\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \max_{x\geq a} |f_n'(x)| = |f_n'(a)| = \frac{e^{-na}}{2\sqrt{a}}(2na-1).$$

Per le proprietà della funzione esponenziale ne ricaviamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-na}}{2\sqrt{a}}(2na-1) < +\infty$$

da cui F è derivabile su $[a,+\infty[$ e $F'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-nx}}{2\sqrt{x}}(1-2nx)$.
Dato che $a > 0$ è arbitrario F è continua e derivabile su $]0,+\infty[$.
Per l'ultimo punto prendiamo un $x > 0$ e ricordiamo che $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}$. Allora

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{nx}} \geq \sum_{n=1}^{\left[\frac{1}{x}\right]} \frac{\sqrt{x}}{e^{nx}} \geq \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\left[\frac{1}{x}\right]} \frac{1}{e} = \frac{\sqrt{x}}{e}\left[\frac{1}{x}\right] \geq \frac{\sqrt{x}}{e}\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Dato che il termine di destra tende a infinito per $x \to 0^+$ lo stesso è vero per $F(x)$. $\square$

2. Sia $f(z)$ definita come serie di potenze da

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}.$$

Si trovi il raggio di convergenza R di f. Si provi inoltre che vale

$$z^2 f''(z) + z f'(z) + f(z) = \frac{1}{1-z} \qquad \forall z \in D(0,R).$$

Svolgimento. Il raggio di convergenza è dato da

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+1}}}$$

Dato che $\sqrt[n]{n} \to 1$ e $\sqrt[n]{A} \to 1$ per ogni $A > 0$ si ha

$$1 \leq \sqrt[n]{1+n^2} \leq \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{1+n^2} \to 1$$

da cui $R = 1$. Per i teoremi sulle serie di potenze

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} z^{n-1}.$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{1+n^2} z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{1+n^2} z^{n-2}.$$

da cui

$$z^2 f''(z) + zf'(z) + f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{1+n^2} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)+n+1}{1+n^2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{1+n^2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

□

3. Si calcoli l'integrale complesso:

$$\int_{\partial D} \frac{1}{e^{2iz}-1}\, dz \qquad \text{dove } D := \{z \ : \ |z-1| \le 3\}.$$

Svolgimento. Poniamo $f(z) := \frac{1}{e^{2iz}-1}$. Per il teorema dei residui l'integrale di f su ∂D è pari a $2\pi i$ volte la somma dei residui nelle singolarità di f interne a D. Le singolarità di f sono gli zeri di $e^{2iz} - i$ cioè $z = k\pi$ per k intero relativo. Di tali punti solo $z_1 = 0$ e $z_2 = \pi$ si trovano dentro D e quindi dobbiamo trovare i residui di f in tali punti. Per trovare il residuo in zero notiamo che

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{z}{e^{2iz}-1} = \frac{h(z)}{z} \qquad \text{dove } h(z) := \frac{z}{e^{2iz}-1}$$

e h è analitica vicino a zero in quanto

$$h(z) = \frac{z}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2iz)^n}{n!} - 1} = \frac{z}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2iz)^n}{n!}} = \frac{1}{2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}} = \frac{1}{2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}}.$$

Ne segue che 0 è un polo semplice e $\mathrm{Res}(f, 0) = h(0) = \frac{1}{2i}$. Per trovare il residuo in π si può scrivere

$$f(z) = \frac{1}{z-\pi}\frac{z-\pi}{e^{2iz}-1} = \frac{1}{z-\pi}\frac{z-\pi}{e^{2i(z-\pi)}-1} = \frac{h(z-\pi)}{z-\pi}$$

dove h è quella di prima (si è sfruttato il fatto che l'esponenziale complesso è periodico di periodo $2\pi i$). Quindi anche π è un polo semplice e $\mathrm{Res}(f, \pi) = h(\pi - \pi) = h(0) = \frac{1}{2i}$. Ne segue

$$\int_D f(z)\, dz = 2\pi i\, (\mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}(f, \pi)) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} + \frac{1}{2i}\right) = 2\pi.$$

Per trovare i residui si può anche usare la formula

$$\mathrm{Res}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}, z_0\right) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}, \qquad \text{se } Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0$$

(che però abbiamo verificato a lezione solo nel caso di Q polinomio – in realtà vale sempre). Usando tale formula si riottiene:

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \left.\frac{1}{2ie^{2iz}}\right|_{z=0} = \frac{1}{2i}, \qquad \mathrm{Res}(f, \pi) = \left.\frac{1}{2ie^{2iz}}\right|_{z=\pi} = \frac{1}{2i}.$$

□

4. Si calcoli
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^3+1)}\,dx.$$

Svolgimento. Per la formula vista a lezione
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^3+1)}\,dx = \frac{2\pi i}{2} \sum_{w^3=-1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sqrt{z}(z^3+1)}, w\right) = (*).$$

Dato che le radici cubiche di -1 sono $e^{\theta i}$ con $\theta = \frac{\pi}{3}i, \pi i, \frac{5\pi}{3}i$ si ha

$$(*) = \pi i \sum_{w^3=-1} \left.\frac{1}{\sqrt{z}3z^2}\right|_{z=w} = \frac{\pi i}{3}\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{6}i}e^{\frac{2\pi}{3}i}} + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}i}e^{2\pi i}} + \frac{1}{e^{\frac{5\pi}{6}i}e^{\frac{10\pi}{3}i}}\right) =$$
$$\frac{\pi i}{3}\left(e^{-\frac{5\pi}{6}i} - i + e^{-\frac{25\pi}{6}i}\right) = \frac{\pi i}{3}\left(e^{-\frac{5\pi}{6}i} - i + e^{-\frac{\pi}{6}i}\right) =$$
$$\frac{\pi i}{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$
$$\frac{\pi i}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} - i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{\pi i}{3}(-2i) = \frac{2\pi}{3}.$$

□

5. Si calcoli
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+x+1}\,dx.$$

Svolgimento. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}\,dx = 2\pi i \sum_{w: w^2+w+1, \Im m w>0} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}, w\right) =$$
$$2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\pi i \left.\frac{e^{2iz}}{2z+1}\right|_{z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} =$$
$$2\pi i \frac{e^{-i-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}}(\cos(1) - i\sin(1)).$$

Passando alla parte reale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}} \cos(1).$$

□