Esercizi su equazioni differenziali mediante serie di Fourier, trasformate di Fourier - Laplace

1. Dato il problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + a^2 y = b(t) \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

si dica per quali valori del parametro a esiste una soluzione per ogni b. Preso poi $a = 4$ e $b(t)$ definito da

$$b(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, T_0] \\ 0 & \text{se } t \in]T_0, \pi] \end{cases}$$

si dica per quali T_0 il problema ha soluzione.

2. Data l'equazione differenziale

$$y'' + y' + y = b(t)$$

(a) si trovino le soluzioni definite su $\mathbb{R}$ e con energia finita, nel caso di

$$b(t) = H(t)e^{-t};$$

(b) per lo stesso $b(t)$ si trovino le soluzioni definite su $\mathbb{R}$ e nulle prima di zero;

(c) si trovino le soluzioni definite su $\mathbb{R}$ e con energia finita, nel caso di

$$b(t) = e^{-|t|};$$

(d) si trovino le soluzioni definite su $\mathbb{R}$ e con energia finita, nel caso di

$$b(t) = H(t)\sin(2t)e^{-t}$$

(suggerimento per questo punto e i due seguenti: usare ile legame tra le traformate della tranlazione e la moltiplicazione per un esponenziale);

(e) per lo stesso $b(t)$ si trovino le soluzioni definite su $\mathbb{R}$ e nulle prima di zero;

(f) si trovino le soluzioni definite su $\mathbb{R}$ e con energia finita, nel caso di

$$b(t) = \sin(2t)e^{-|t|};$$

(g) si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea ($b = 0$).