Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 26 gennaio 2009

PRIMA PARTE (per tutti)

(a.1) Sia α un parametro reale e si consideri la successione di funzioni $f_n : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ definite da $f_n(x) := n^\alpha x e^{-\frac{2x^2}{n}}$.

1. Si dica per quali valori di α la successione (f_n) converge uniformemente su $[0,+\infty[$;
2. Si trovi l'insieme degli α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente su $[0,+\infty[$.
3. Si dica se per $\alpha = -\frac{5}{4}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $[0,1]$.
4. $(\star)$ Si trovi l'insieme degli α per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su $[0,+\infty[$.

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+2x+10)}\,dx.$$

(b.1) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = \cos(t)e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases} .$$

(b.1) Dati il parametro reale α e la successione di funzioni del punto (a.1)

1. si trovino i valori di α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0,+\infty[)$;
2. si dica se, per $\alpha = -2$, la la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^2([0,+\infty[)$

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

(c.1) Si consideri il problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = f \\ y(t) = 0 \text{ per } t < 0. \end{cases}$$

Si trovi la soluzione y nei due casi seguenti:

1. $f = \delta'$;
2. $f(t) = H(t)\cos(t)$.

(c.2) Si trovino tutte le distribuzioni u tali che:

1. $\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) u = 1;$
2. $(\star)$ $t^2 u = \delta.$