Soluzioni compito 03.06.19

Esercizio 1

a) Passando a coordinate polari
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$
si ha, per $(x,y) \neq (0,0)$
$$\left|\frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}\right| = \frac{|\sin(\rho^3\cos^2\theta\sin\theta)|}{\rho^2} \leq$$
$$\leq \rho\cos^2\theta|\sin\theta| \leq \rho$$
da cui
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} =$$
$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sin(\rho^3\cos^2\theta\sin\theta)}{\rho^2} = 0 = f(0,0)$$
e f è pertanto continua in $(0,0)$. Negli altri punti del piano lo è in quanto somma, prodotto, quoziente e composizione di funzioni continue.

b) Poiché
$$f(x,0)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad e \quad f(0,y)=0 \quad \forall y\in\mathbb{R}$$
si ha immediatamente che
$$D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$$
Negli altri punti del piano f è derivabile parzialmente in quanto somma, prodotto, quoziente, composizione di funzioni derivabili parzialmente. Inolt
$$D_1 f(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2)\cos(x^2y) - 2x\sin(x^2y)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$D_2 f(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2)\cos(x^2y) - 2y\sin(x^2y)}{(x^2+y^2)^2}$$
quando $(x,y) \neq (0,0)$.

c) In base alla definizione di differenziabilità in un punto, occorre provare che

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) - D_1 f(0,0) h_1 - D_2 f(0,0) h_2 \neq o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$$

per $(h_1, h_2) \to (0,0)$.

Nel nostro caso, cioè, che in base al punto b)

$$\frac{\sin(h_1^2 h_2)}{h_1^2+h_2^2} \neq o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right) \qquad (*)$$

Usando, come nel punto a), le coordinate polari e la formula di Taylor per $\sin u$ intorno al punto $u=0$ si ha infatti

$$\frac{\sin(h_1^2 h_2)}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = \frac{\sin(\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta)}{\rho^3} = \cos^2\theta \sin\theta + o(1$$

per $\rho \to 0^+$. Pertanto

$$\nexists \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sin(h_1^2 h_2)}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

Ciò dimostra la $(*)$.

d) V è grafico della curve cartesiana $\underline{r}: [1,2] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\underline{r}(u) = (u, \pi/2u^2)$

Quindi

$$f_{|V}(u) = \frac{\sin(\pi/2)}{u^2+(\pi/2u^2)^2} = \frac{4u^4}{4u^6+\pi^2} = g(u)$$

Ma $$g'(u) = \frac{16u^3(\pi^2-2u^6)}{(4u^6+\pi^2)^2} \begin{cases} >0 & \text{se } 0<u<(\pi^2/2)^{1/6} \\ =0 & \text{se } u=(\pi^2/2)^{1/6} \\ <0 & \text{se } u>(\pi^2/2)^{1/6} \end{cases}$$

Inoltre $g(1) = \frac{4}{4+\pi^2} > \frac{64}{256+\pi^2} = g(2)$ e dunque $1<(\pi^2/2)^{1/6}<2$. Se ne deduce che

$$\max_{\text{sub } V} f = g\left(\left(\pi^2/2\right)^{1/6}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2/3} \quad ; \quad \min_{\text{sub } V} f = \frac{64}{256+\pi^2}$$

Esercizio 2.

a) L'applicazione vettoriale data è di classe C^1 poiché di classe C^1 sono le sue componenti $F_1(x,y)$ e $F_2(x,y)$

Si ha $\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = y e^{xy} \sin y \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = y e^{xy} \cos y$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = (x \sin y + \cos y) e^{xy}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) = (x \cos y - \sin y) e^{xy}$$

La matrice Jacobiana nel punto $(0, \pi/4)$ è dunque

$$\begin{pmatrix} \pi/4\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \pi/4\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $-\pi/4$

b) Il determinante della matrice Jacobiana nel punto (x,y) è

$$e^{2xy}\left(xy \sin y \cos y - y \sin^2 y\right) - e^{2xy}\left(xy \sin y \cos y + y \cos^2 y\right) =$$
$$= -y e^{2xy} \neq 0 \iff y \neq 0$$

Pertanto nel piano privato dell'asse delle x $\underline{F}$ è localmente invertibile. Per provare che non è invertibile nei punti dell'asse delle x, è sufficiente osservare che

$$\underline{F}(x,0) = (0,1)$$

$\underline{F}$ è quindi costante per $y=0$ e non può pertanto essere invertibile in nessun intorno di $(x,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Esercizio 3

a) Ω si ottiene intersecando il cono solido

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le \sqrt{x^2+y^2}\}$$

e la palla chiusa

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 8\}.$$

Passando alle coordinate sferiche

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

si ha pertanto

$$\Omega=\{(\rho,\varphi,\theta) \mid 0\le\rho\le 2\sqrt{2},\ 0\le\varphi\le\pi/4,\ 0\le\theta\le 2\pi\}.$$

Ricordando che lo Jacobiano del cambiamento di coordinate ha determinante $\rho^2\sin\varphi$, si ottiene quindi

$$\mathrm{vol}(\Omega)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^2\, d\rho=$$

$$=2\pi\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi/4}\cdot\Big[\rho^3/3\Big]_0^{2\sqrt{2}}=2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{16\sqrt{2}}{3}=\frac{32\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$$

b) Poiché l'intersezione tra il cono

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\sqrt{x^2+y^2}\}$$

e la sfera

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=8\}$$

è la circonferenza

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=2 \end{cases}$$

la superficie totale di Ω è unione della superficie conica

$$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le 2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\}$$ e

di quella della calotta sferica

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2\le z\le 2\sqrt{2},\ x^2+y^2+z^2=8\}.$$

Parametrizziamo C usando le coordinate sferiche

$$\underline{r}: \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta \\ y = 2\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta \\ z = 2\sqrt{2}\cos\varphi \end{cases} \qquad (\varphi,\theta)\in[0,\pi/4]\times[0,2\pi]$$

mentre Σ si parametrizza come superficie di rotazione

$$\underline{s}: \begin{cases} x = u\cos\theta \\ y = u\sin\theta \\ z = u \end{cases} \qquad (u,\theta)\in[0,2]\times[0,2\pi]$$

Si ha inoltre

$$\underline{r}_\varphi = 2\sqrt{2}(\cos\varphi\sin\theta, \cos\varphi\cos\theta, -\sin\varphi)$$

$$\underline{r}_\theta = 2\sqrt{2}(-\sin\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta, 0)$$

$$\underline{s}_u = (\cos\theta, \sin\theta, 1) \qquad \underline{s}_\theta(-u\sin\theta, u\cos\theta, 0)$$

da cui

$$\|\underline{r}_\varphi\times\underline{r}_\theta\| = 8\|(\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\varphi\| = $$
$$= 8(\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi)^{1/2} = 8\sin\varphi$$

e

$$\|\underline{s}_u\times\underline{s}_\theta\| = \|-u\cos\theta, -u\sin\theta, u\| = u\sqrt{2}$$

Dunque

$$\text{area}(C) = 8\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\, d\varphi = 8\pi(2-\sqrt{2})$$

$$\text{area}(\Sigma) = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 u\, du = 4\pi\sqrt{2}$$

$$\text{area}(\partial\Omega) = \text{area}(C) + \text{area}(\Sigma) = 4\pi(4-\sqrt{2})$$

c) Per il teorema della divergenza, il flusso in uscita da Ω del campo $\underline{F}$ è uguale all'integrale di volume della divergenza di $\underline{F}$. Ma

$$\text{div}\,\underline{F} = \text{div}(3x^2-3y^2, 2z-6xy, z) = 6x-6x+1 = 1$$

e quindi

$$\Phi_\Omega(F) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \text{vol}(\Omega) = \frac{32\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$$

come visto nel punto a) $\square$