“MATEMATICA” – A.A. 1999/2000 – Prova del 27/5/00

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Sia $\Delta_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. È vero che $\int_{\partial\Delta_1} \frac{dz}{z^2+4} = \int_{\partial\Delta_3} \frac{dz}{z^2+4}$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

2. Se una successione $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ soddisfa la relazione $a_{n+1} = (a_n - 1)^2$ per ogni $n \geq 0$, essa ha necessariamente limite finito? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

3. Le orbite del sistema $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x \end{cases}$ tendono tutte all'origine per $t \to +\infty$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

4. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa e $z_0 \neq 0$. Se $f(\lambda z_0) = f(z_0)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si può concludere che f è costante? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

5. La funzione $f(x, y) = (xe^y, ye^x)$ è localmente invertibile in $(0, 0)$? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

6. Siano $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ continue con $|f(t)| \leq |g(t)|$ per ogni $t > 0$. Siano $F = \mathcal{L}(f)$ e $G = \mathcal{L}(g)$ le trasformate di Laplace. È vero che l'insieme di definizione di F contiene quello di G? $\boxed{\text{V}}$ / $\boxed{\text{F}}$

7. Se f è olomorfa su un aperto che contiene la chiusura del disco di centro 0 e raggio 2, e $|f(z)| \leq 4$ per ogni z in tale disco, quale dei seguenti numeri è il più piccolo che certamente è maggiore o uguale di $|f'(0)|$? $\boxed{\text{a}}$ 1 ; $\boxed{\text{b}}$ 2; $\boxed{\text{c}}$ 4; $\boxed{\text{d}}$ 1/2.

8. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} x' = t/x \\ x(0) = 1 \end{cases}$. La soluzione: $\boxed{\text{a}}$ non è definita su tutto $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{b}}$ è limitata su $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{c}}$ ha un solo minimo su $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{d}}$ è dispari su $\mathbb{R}$.

9. Quanto fa $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)\,dx}{1+x^2}$? $\boxed{\text{a}}$ π/e; $\boxed{\text{b}}$ e/π; $\boxed{\text{c}}$ $\pi e/2$; $\boxed{\text{d}}$ $\pi/2e$.

10. Sia $\alpha(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ per $t \in [0, 2\pi]$. Qual'è l'area della regione di $\mathbb{R}^2$ delimitata da α e dall'asse delle ascisse? $\boxed{\text{a}}$ 10π; $\boxed{\text{b}}$ 1; $\boxed{\text{c}}$ 2π; $\boxed{\text{d}}$ 3π.

11. Qual è il massimo della funzione $x + y$ sul sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x^2 + z^2 = 1$ e $y + z = 1$? $\boxed{\text{a}}$ $2 + \sqrt{2}$; $\boxed{\text{b}}$ $1 + \sqrt{2}$; $\boxed{\text{c}}$ $1 - \sqrt{2}$; $\boxed{\text{d}}$ $2 - \sqrt{2}$.

12. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, 2π-periodica, con grafico costituito da una spezzata. Sia $e_n(t) = e^{int}$ e $\alpha_n = (1/2\pi) \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{e_n(t)} f(t)\,dt$ per $n \in \mathbb{Z}$. Quale è vera sulle serie $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e_n$ e $S' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\alpha_n e_n$?
$\boxed{\text{a}}$ Entrambe convergono uniformemente; $\boxed{\text{b}}$ S converge uniformemente, S' solo puntualmente;
$\boxed{\text{c}}$ S converge uniformemente, S' solo in media integrale quadratica;
$\boxed{\text{d}}$ entrambe convergono solo in media integrale quadratica.

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. Non è concesso alzarsi prima della fine della prova né chiedere chiarimenti. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e una penna. Prima di consegnare bisogna annotare le risposte date. Le domande V/F valgono ± 2 punti, le altre $+3/-1$ punti. Le risposte omesse valgono 0.

"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Prova del 27/5/00

Risposte esatte

1. V
2. F
3. F
4. V
5. V
6. V
7. b
8. c
9. a
10. d
11. b
12. b