Geom - Civile - 31/3/21

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)\cdot t + \frac{1}{2} f''(x)\cdot t^2 + o(t^2)$$

- $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0 \Rightarrow x$ pto di min loc
- x pto di min loc $\Rightarrow f'(x) = 0$, $f''(x) \geq 0$

$(f(x) = x^4)$

Taylor in dim = n $\qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x+u) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\cdot u_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\cdot u_i u_j + o(\|u\|^2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \langle \operatorname{grad}(f)(x) \mid u \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$$\langle H(f)(x)\, u \mid u \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle u \mid u \rangle_{H(f)(x)}$$

"dimo." Uso caso $n = 1$ $\qquad g(t) = f\left(x + \frac{u}{\|u\|}\cdot t\right)$

$\frac{u}{\|u\|}$ fisso che ci è comodo

$$f(x+u) = g(\|u\|)$$

$$g(t) = g(0) + g'(0)\cdot t + \frac{1}{2} g''(0)\cdot t^2 + o(t^2)$$

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x + \frac{u}{\|u\|}\cdot t\right)\cdot \frac{u_j}{\|u\|}$$

$$g''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\cdot \frac{u_j}{\|u\|}\cdot\frac{u_i}{\|u\|}$$

$$f(x+u) = g(\|u\|) = f(x) + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\cdot \frac{u_j}{\|u\|}\right)\cdot\|u\|$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\cdot \frac{u_i}{\|u\|}\cdot\frac{u_j}{\|u\|}\right)\cdot\|u\|^2$$

$$+ o(\|u\|^2) \quad \text{“}\square\text{”}$$

$$f(x+u) = f(x) + \langle \operatorname{grad}(f)(x) \mid u\rangle + \frac{1}{2}\langle u \mid u\rangle_{Hf(x)} + o(\|u\|^2)$$

- $\operatorname{grad}(f)(x) = 0$, $Hf(x)$ ha autoval > 0
  $\Rightarrow$ a pto di min loc

- x pto di min loc
  $\Rightarrow \operatorname{grad}(f)(x) = 0$,
  $Hf(x)$ ha autoval ≥ 0

Too special
dopo cambio ortogonale di coord

$\lambda_1 u_1^2 + \cdots + \lambda_n u_n^2$
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autovalori di $Hf(x)$

Prop: dato V con $\langle . | . \rangle$, $W \subset V$ sottosp.
$P_W(v)$ è il pto di W più vicino a v.

Dimo: Se $w_1, \dots, w_k$ base ortog. di W so che

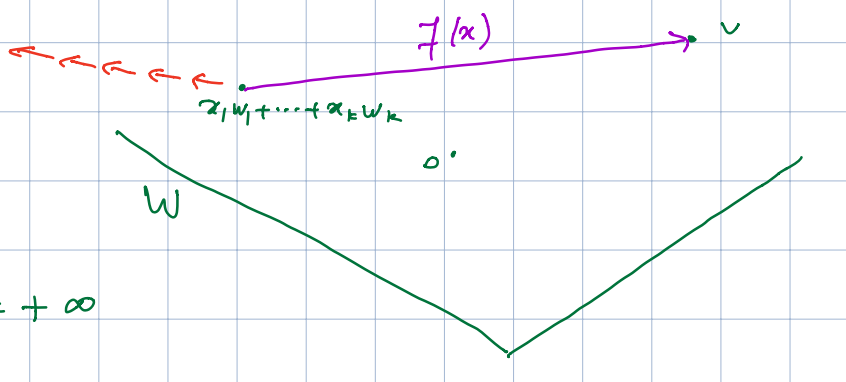
$$P_W(v) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j .$$

Il generico pto di W è $x_1 w_1 + \dots + x_k w_k \qquad x \in \mathbb{R}^k$;

$$d(v, \text{ esso})^2 = \| v - (x_1 w_1 + \dots + x_k w_k) \|^2 = f(x).$$

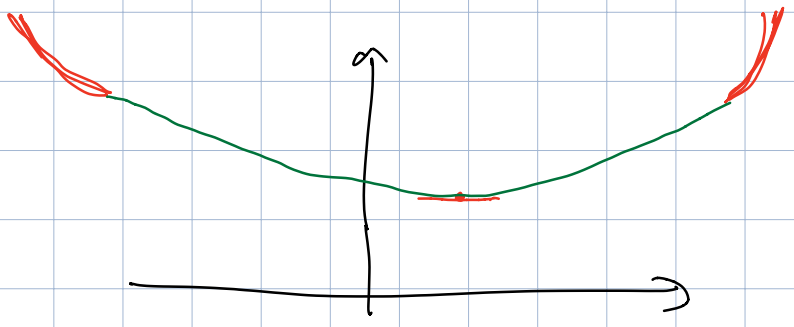
Devo vedere che f ha min. nel pt x, $x_j = \dfrac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2}$.

$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$



Oss: $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ se provo che c'è un solo pto $\tilde{x}$ in cui $\text{grad}(f)(x) = 0$, tale x è di minimo.



Calcolo grad(f) e impongo annullamento:

$$f(x) = \| v - \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \|^2$$

$$= \|v\|^2 - 2\left\langle v \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \right\rangle + \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \right\|^2$$

$$= \|v\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \langle v | w_i \rangle \cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} \|w_i\|^2 \cdot x_i^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -2\langle v | w_j \rangle + \|w_j\|^2 \cdot 2x_j$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 0 \iff x_j = \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2}.$$

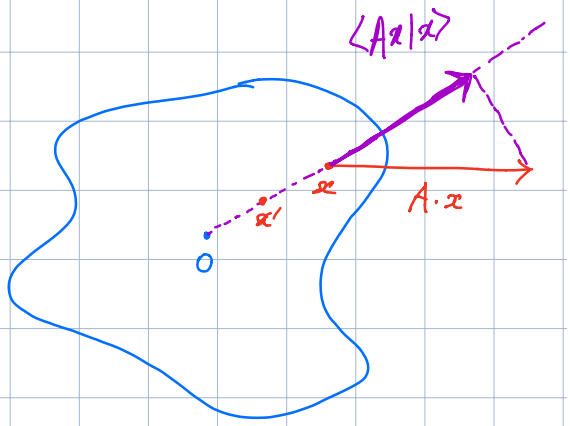
Sappiamo: A simm ha autoval reali.

Teo: dato $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica, la funzione

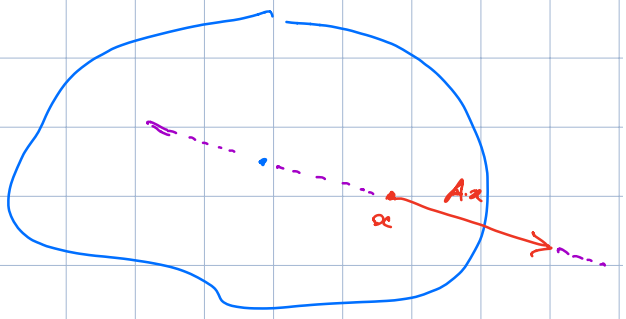
$$f(x) = \frac{\langle Ax | x \rangle}{\|x\|^2} \qquad f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

ha max e min. ed essi sono autovalori di A, e i punti in cui sono assunti sono relativi autovettori.

$\frac{\langle Ax|x\rangle}{\|x\|^2} =$ la componente lungo la direzione x della forza applicata a x misurata in modo da dipendere solo dalla direzione -



Nel pto di max o min di tale componente, in realtà l'intera forza agisce nella direzione di x.

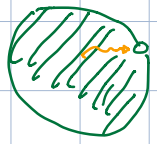


Dimo: $n = 1$: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua ha max e min

$[a,b]$ chiuso e limitato

$n \geq 1$ $\quad f : C \to \mathbb{R}$ continua

C chiuso e limitato $\Rightarrow f$ ha max/min.



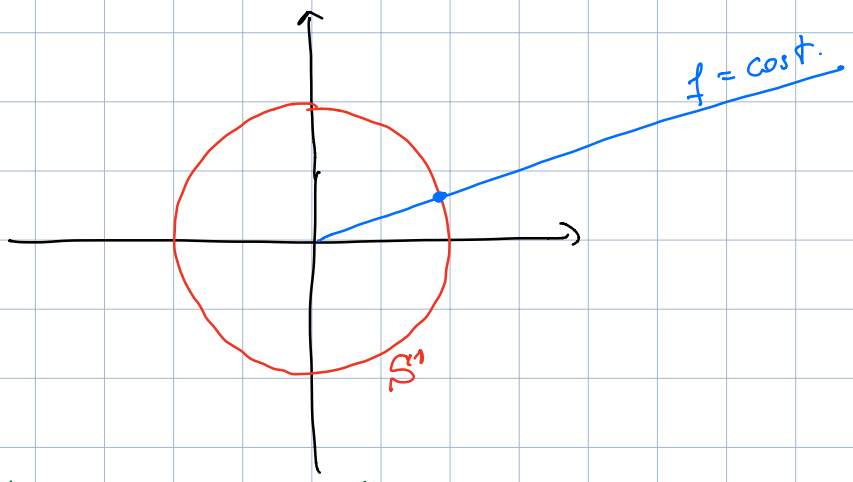
$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ non è né chiuso né limitato

$$f(t\cdot x) = \frac{\langle A\cdot tx \mid tx\rangle}{\|tx\|^2} = \frac{t^2\langle Ax\mid x\rangle}{t^2\cdot\|x\|^2} = \frac{\langle Ax\mid x\rangle}{\|x\|^2}$$

$\Rightarrow$ f è costante sulle semirette aperte uscenti dall'origine

$\Rightarrow$ f assume gli stessi valori che assume su

$$S^{n-1} = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|=1\} \qquad \text{(sfera unitaria)}$$



S^{n-1} è chiuso e limitato, f continua $\Rightarrow$ f ha max/min.

Prendo λ max o min, x relativo pto di max o min.

Provo che $A\cdot x = \lambda\cdot x$. Uso $\operatorname{grad}(f)(x) = 0$:

$$f(x) = \frac{\langle Ax\mid x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,x_i\,x_j}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\delta_{ik}\cdot x_j + x_i\cdot\delta_{jk}\right)\|x\|^2 - \langle Ax\mid x\rangle\cdot 2x_k}{\|x\|^4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\cdot x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\cdot x_i$$

uguali

$$= 2 \sum_{j=1}^{n} a_{kj} a_j = 2 (A \cdot x)_k$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \frac{2}{\|x\|^2} \cdot \left((A \cdot x)_k - \frac{\langle Ax | x \rangle}{\|x\|^2} \cdot x_k \right)$$

$$\| \qquad \lambda = f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad A \cdot x = \lambda \cdot x. \qquad \blacksquare$$

Def. $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è ortogonale se ${}^tA = A^{-1}$ cioè se $\|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ cioè se A è isometria.

Def. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria qualsiasi funzione (anche non lineare) che preserva le distanze

$$\| f(x) - f(y) \| = \|x - y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Oss (1) A ortogonale $\Longrightarrow$ $x \longmapsto A \cdot x$ è isometria

(2) Traslazione $T_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + v$ è isometria

(3) composizione di isometrie lo è

Dunque:

(4) Ogni $T_v \circ A : x \longmapsto A \cdot x + v$ con A ortog. è isometria.

Def: ogni trasformazione $T_v \circ A$ (con A ortogonale) è detta affine.

Oss: $T_v \circ A$ è isometria $\iff$ A ortog.

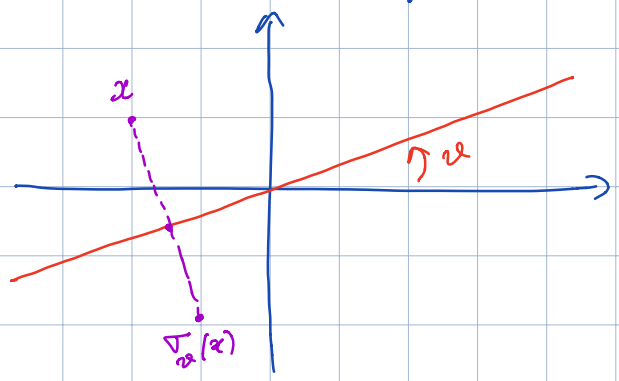
Teorema: tutte le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono affini.

Dimo del caso particolare $n = 2$:

T_v = traslazione di vett v

π_φ = rotazione di angolo φ

σ_v = riflessione rispetto a retta per 0 di inclinaz. v



$$\pi_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \sigma_v = \begin{pmatrix} \cos\varphi & +\sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\varphi = 2v$

Sono matrici ortogonali.

esercizio

Teo: ogni isometria di $\mathbb{R}^2$ è $T_v \circ \pi_\varphi$ o $T_v \circ \sigma_v$ (in particolare è affine).

Dimo: Preso $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometria. Chiamo $r = f(0)$ e $g = T_{-r} \circ f$; g è isometria, $g(0) = 0$.

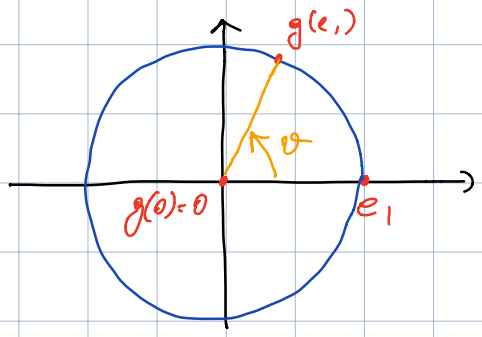
Ora considero $g(e_1)$: $d(0, e_1) = d(g(0), g(e_1))$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \qquad\qquad\quad \|$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1 \qquad\qquad\quad 0$

$\Rightarrow d(0, g(e_1)) = 1 \Rightarrow g(e_1) \in S^1$:

definisco $\vartheta =$



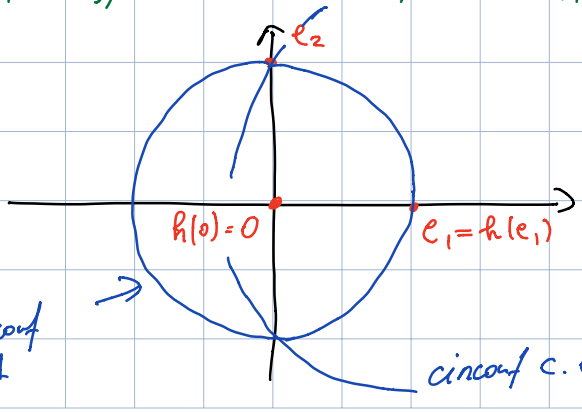
Preso $h = r_{-\vartheta} \circ g = r_{-\vartheta} \circ T_{-r} \circ f$. E ho:

- $h(0) = 0$
- $h(e_1) = e_1$
- h isometria.

Esamino $h(e_2)$:

$d(0, h(e_2)) = d(h(0), h(e_2)) = d(0, e_2) = 1$

$d(e_1, h(e_2)) = d(h(e_1), h(e_2)) = d(e_1, e_2) = \sqrt{2}$



$\Rightarrow h(e_2) = \begin{cases} e_2 \\ -e_2 \end{cases}$

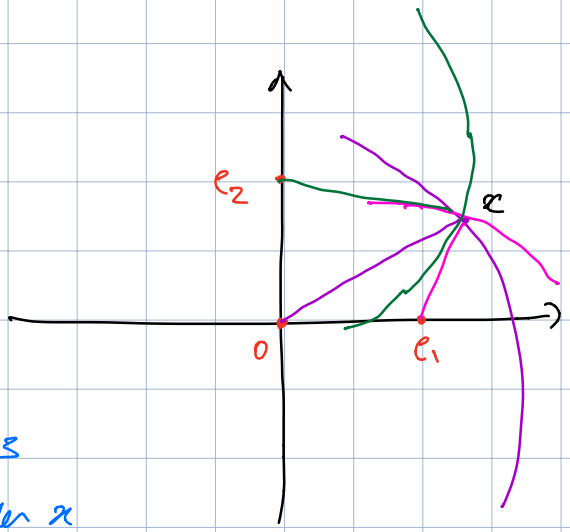
Se $h(e_2) = e_2$ affermo che $h = id$:

dato $x \in \mathbb{R}^2$

$d(0, h(x)) = d(0, x)$

$d(e_1, h(x)) = d(e_1, x)$

$d(e_2, h(x)) = d(e_2, x)$



$\Rightarrow h(x)$ è intersezione delle 3 circonferenze che passano per x con centri $0, e_1, e_2$

Ma 3 circonf con centri non allineati si intersecano in un solo pto $\Longrightarrow h(x) = x$

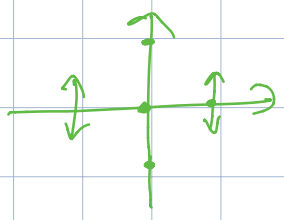
Concludo $h = \pi_{-v} \circ \tau_{-v} \circ f = id$

$\Rightarrow f = \tau_v \circ \pi_v$.

Se invece $h(e_2) = -e_2$ pongo

$k = \sigma_0 \circ h$

allora k isometria che fissa $0, e_1, e_2$



$\Rightarrow k = id$

$\Rightarrow \sigma_0 \circ \pi_{-v} \circ \tau_{-v} \circ f = id$

$\Rightarrow f = \tau_v \circ \pi \circ \sigma_0$

π : $\sigma_{v/2}$ (esercizio)

Modelli metrici delle coniche

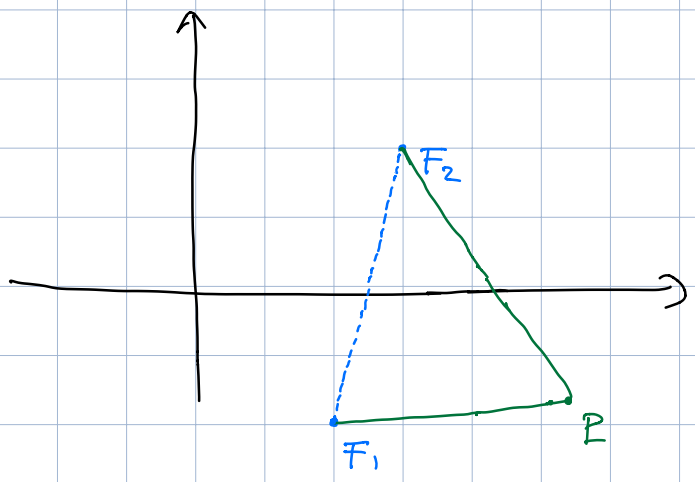
Descrivo tramite equazioni luoghi del piano $\mathbb{R}^2$ definiti da condizioni geometriche.

ELLISSE: dati $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2k\}$$

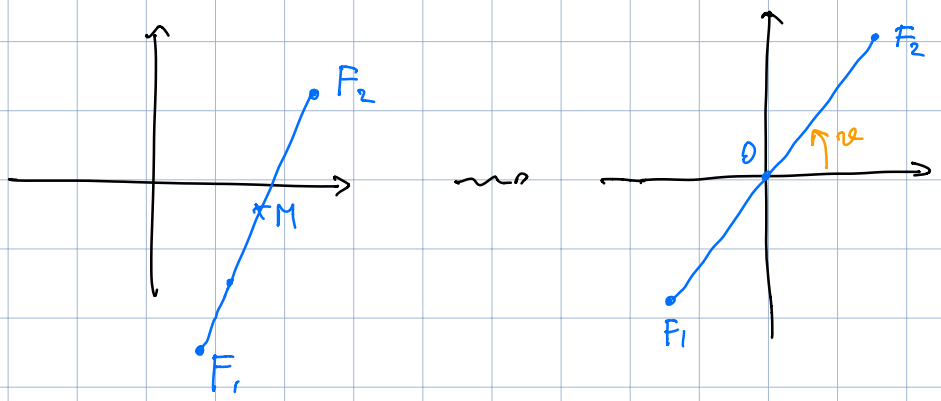
$2h = d(F_1,F_2)$

$k > h$

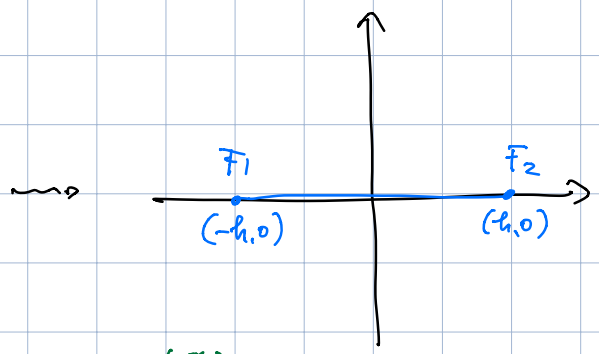


Equazione canonica a mezzo di isometrie:

- chiamo $M = \frac{F_1+F_2}{2}$ pto medio di F_1F_2
  e applico τ_{-M}



- chiamo $v = \dots$ e applico π_{-v}



Scrivo equazione per $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\sqrt{(x+h)^2+y^2} + \sqrt{(x-h)^2+y^2} = 2k$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2+y^2} = 2k - \sqrt{(x+h)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \text{elevo al } \square \qquad x^2 - 2xh + h^2 + y^2 = 4k^2 - 4k\sqrt{(x+h)^2+y^2} + x^2 + 2xh + h^2 + y^2$$

$\Longleftrightarrow \quad 4k\sqrt{(x+h)^2+y^2} = 4k^2 + 4xh$

$\Longrightarrow$ elevo al $\square$ $\quad k^2x^2 + 2k^2hx + k^2h^2 + k^2y^2 = k^4 + 2k^2xh + h^2x^2$

$\Longleftrightarrow \quad (k^2-h^2)x^2 + k^2y^2 = k^2(k^2-h^2)$

$\Longleftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{k^2} + \dfrac{y^2}{k^2-h^2} = 1$ $\qquad k^2>0 \quad a=k$

$k^2-h^2>0 \quad b=\sqrt{k^2-h^2}$

$\Longleftarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Fatto: con gli elevamenti al $\square$ non ho aggiunto punti.

Teorema: a meno di isometrie l'ellisse ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Oss: se $F_1 = F_2$ ho $h=0$ $\quad b^2=a^2$

$x^2+y^2=a^2$ circonferenza.