

Algebra Lineare 7/12/17

$$A \in M_{m \times n}(K)$$

$$K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) &= \dim(\text{Im}(f_A)) = \dim(\text{spazio generato dalle colonne}) \\ &= \max \text{ numero di colonne che sono un sist.} \\ &\quad \text{lin. indep.} \end{aligned}$$

- Fatti:
- 1) Il rank si calcola tramite dei determinanti
 - 2) $\det({}^t M) = \det(M)$

$\Rightarrow$ il "rank per righe" = max numero di righe che sono
un sist. lin. indep.

è uguale al rank per colonne.

Conseguenze: $A \in M_{m \times n} \Rightarrow \text{rank}(A) \leq \min(m, n)$

($\text{rank}(A) \leq n$ ovvio dalla def;

$\text{rank}(A) \leq m$ segue dalle formule della dim
poiché $\text{rank}(A) = m - \dim(\text{Ker}(A))$)

Radici di polinomi complessi

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m \in \mathbb{C}[z]$$

TFA $\deg(p(z)) > 0$ allora $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $p(z_0) = 0$.

Divisione tra polinomi: dati $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$,

$\deg(f(z)) > 0$ $\exists$ unici $q(z), r(z)$ t.c.

$$f(z) = g(z) \cdot q(z) + r(z)$$

$$\deg(r(z)) < \deg(g(z))$$

Teo (Ruffini): z_0 è radice di $p(z) \iff p(z)$ è divisibile per $(z-z_0)$

Dim: $\Leftarrow$ Se $p(z) = (z-z_0) \cdot q(z) \Rightarrow p(z_0) = (z_0-z_0) \cdot q(z_0) = 0$

$\Rightarrow$ Divido $p(z) = (z-z_0) \cdot q(z) + r(z)$ $\deg(r(z)) < \deg(z-z_0) = 1$

$\Rightarrow r(z) = r \in \mathbb{C}$

Sostituisco $z=z_0$:

$$\begin{array}{c} p(z_0) = \underbrace{(z_0-z_0)}_0 \cdot q(z_0) + r \\ \parallel \quad \quad \quad \parallel \\ 0 \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow r = 0$$



Sic $p(z) = 0$

Se z_0 è radice di $p(z)$ ho $p(z) = (z - z_0) \cdot p_1(z)$.

Se $p_1(z_0) \neq 0$, fine; se no $p_1(z) = (z - z_0) \cdot p_2(z)$
 $\Rightarrow p(z) = (z - z_0)^2 \cdot p_2(z)$.

Se $p_2(z_0) \neq 0$, fine; se no $p(z) = (z - z_0)^3 \cdot p_3(z)$ -

Procedo finché non ho $p(z) = (z - z_0)^k \cdot p_k(z)$ con $p_k(z_0) \neq 0$

(mi furo poiché $\deg(p_k(z)) = \deg(p(z)) - k$).

Def: tale k è detta molteplicità di z_0 come radice di $p(z)$.

e il più grande intero h t.c. $(z-z_0)^h$ divide $p(z)$.

la molt. di z_0 come radice è quante volte

z_0 è radice di $p(z)$

Fissiamo $p(z)$ ^{di grado > 0} ; TFA: c'è una radice z_1 ; sia k_1 la
molt.; allora $p(z) = (z-z_1)^{k_1} \cdot p_1(z)$; se $p_1(z) \in \mathbb{C}$, fine;
se no ha radice z_2 di molt. $k_2 \Rightarrow p(z) = (z-z_1)^{k_1} (z-z_2)^{k_2} \cdot p_2(z)$

Continuando: $p(z) = c \cdot (z - z_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - z_m)^{k_m}$ $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$

Oss: $k_1 + \dots + k_m = \deg(p(z))$.

Teo: un polinomio a coeff. in $\mathbb{C}$ di grado n ha esattamente n radici contate con molteplicità.

Exercizi: passare $E \subset \mathbb{C}^k$ da param. a contenitore o vice.

$$1) E = \begin{pmatrix} 7-i \\ 3+4i \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2+i \\ 5-2i \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{C}^2$$

$$E: (5-2i)z_1 - (2+i)z_2 = (5-2i)(7-i) - (2+i)(3+4i)$$

$$2) E: (1-i)z_1 + (4-3i)z_2 = 5+i$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{5+i}{1-i} \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 4-3i \\ -1+i \end{pmatrix}$$

$$3) E = \begin{pmatrix} 2+i \\ 3-i \\ 1+4i \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 5+2i \\ 7-i \\ 8+5i \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{C}^3$$

$$\begin{cases} (7-i)z_1 - (5+2i)z_2 = (7-i)(2+i) - (5+2i)(3-i) \\ (8+5i)z_2 - (7-i)z_3 = (8+5i)(3-i) - (7-i)(1+4i) \end{cases}$$

$$4) E: (7+2i)z_1 + (5+8i)z_2 + (-3+14i)z_3 = 8+i \subset \mathbb{C}^3$$

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8+i \\ -3+14i \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 5+8i \\ -(7+2i) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-14i \\ 0 \\ 7+2i \end{pmatrix} \right)$$

$$5) \quad E = \begin{pmatrix} -2 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix} + \text{span} \left(\begin{pmatrix} 7+i \\ 4 \\ -3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1+i \\ -9 \end{pmatrix} \right)$$

$$E: \left(4 \cdot (-9) - (-3i)(1+i) \right) z_1 - \left((7+i) \cdot (-9) - (-3i)(2i) \right) z_2 \\ + \left((7+i)(1+i) - 4 \cdot (2i) \right) z_3 = \dots$$

$$(-36 + 3i - 3) z_1 - (-63 - 9i - 6) z_2 + (6 + 8i - 8i) z_3 = \dots$$

$$(-39 + 3i) z_1 + (69 + 9i) z_2 + 6 z_3 = \dots$$

$$(i - 13) z_1 + (23 + 3i) z_2 + 2 z_3 = -2i + 26 + 23i - 3 + 2 - 2i$$

$$6) E: \begin{cases} 2iz_1 - 4z_2 + (1-i)z_3 = 5 \\ (1+2i)z_1 + 3iz_2 + (2-i)z_3 = 1+6i \end{cases} \subset \mathbb{C}^3$$

$$E = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 & 1-i \\ 3i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/5 \\ 1+6i \end{pmatrix} \right) + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -4(2-i) - 3i(1-i) \\ -(2i(2-i) - (1+2i)(1-i)) \\ 2i \cdot 3i - (1+2i)(-4) \end{pmatrix} \right) \dots$$

$$7) E: \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 7i \\ 4+i \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2i \\ 3-2i \\ 4 \\ 1-7i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+3i \\ -5 \\ 6-i \\ 7+i \end{pmatrix} \right) \right) \subset \mathbb{C}^4$$

$$\dim(E) = 2 \Rightarrow \text{servono } 4-2 = 2 \text{ equaz.}$$

Posso cercare equazioni in cui non compare una delle coordinate

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = \beta$$

$$\begin{cases} ((3-2i)(6-i) - 4(-5))z_1 - ((2i)(6-i) - 4(1+3i))z_2 + ((2i)(-5) - (3-2i)(1+3i))z_3 = \dots \\ (4(7+i) - (1-7i)(6-i))z_1 - ((2i)(7+i) - (1-7i)(1+3i))z_3 + ((2i)(6-i) - 4(1+3i))z_4 = \dots \end{cases}$$

8)

$$E: \begin{cases} 2iz_1 - 4z_2 + (1+i)z_3 - 5z_4 = 59 \\ (7+2i)z_1 - (1-i)z_2 + 9z_3 + (4-3i)z_4 = 7-i \end{cases}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ 0 \\ * \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} (1+i)(4-3i) - 9 \cdot (-5) \\ -((-4)(4-3i) - (-(-1-i)(-5))) \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \right)$$